

Erstellung, Kopplung und Anwendung  
dynamischer thermischer Kompaktmodelle  
leistungselektronischer Systeme

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der Fakultät für Elektrotechnik und  
Informationstechnik der Technischen Universität Ilmenau

von Dipl.-Ing. Philipp Freiburger

1. Gutachter: PD Dr.-Ing. habil. Thomas Ellinger  
*Technische Universität Ilmenau*
2. Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hannes Töpfer  
*Technische Universität Ilmenau*
3. Gutachter: Dr.-Ing. Robert Krümmer  
*ISLE GmbH Ilmenau*

Tag der Einreichung: 03.07.2018

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 02.09.2019



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Doktorand bei der Robert Bosch GmbH, Geschäftsbereich Power Tools, in Leinfelden-Echterdingen, in Zusammenarbeit mit dem Fachgebiet Leistungselektronik und Steuerungen in der Elektroenergietechnik am Institut für Elektrische Energie- und Steuerungstechnik der Technischen Universität Ilmenau.

Hiermit möchte ich mich insbesondere bei all denjenigen bedanken, die mich fachlich und privat beim Gelingen der Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt natürlich Prof. Dr. Jürgen Petzoldt, dem Leiter des Fachgebiets, für die universitäre Betreuung, sein Interesse am Fortgang der Arbeit und die wohlwollende Unterstützung.

Besonders möchte ich mich bei Dr. Michèle Hirsch bedanken, die mir stets mit Ideen zur Verbesserung der Arbeit sowie motivierenden Worten zur Seite stand.

Danken möchte ich außerdem Uwe Franke und Dr. Thomas Ellinger für anregende Diskussionen in entspannter Atmosphäre, die zu tiefem Verständnis beitrugen.

Dr. Thomas Ellinger, Prof. Dr. Hannes Töpfer und Dr. Robert Krümmer danke ich für das Gutachten meiner Arbeit.

Nicht zuletzt gilt mein Dank auch meiner Fachabteilung bei Bosch Power Tools für Unterstützung in allen Belangen und das Schaffen einer angenehmen Arbeitsatmosphäre.

Stuttgart, im Juni 2018

Philipp Freiburger





# Kurzfassung

In dieser Arbeit werden verschiedene Methoden der thermischen Kompaktmodellierung erläutert, wobei die Vorteile von Kompaktmodellen basierend auf thermischen Impedanzen ( $Z_{th}$ ) ausgearbeitet werden. Es wird gezeigt, dass mit Kompaktmodellen der Temperaturverlauf komplexer thermischer Systeme mit variablen Randbedingungen annähernd exakt nachgebildet werden kann.

Mit dem Ziel, ein Kompaktmodell eines Akkupacks basierend auf thermischen Impedanzen zu erstellen, wird zunächst ein detailliertes Modell ausgearbeitet. Dazu werden die thermophysikalischen Parameter einer Lithium-Ionen-Zelle aus Literaturwerten und Messungen ermittelt, mit einem empirischen Verlustmodell validiert und in das Gesamtmodell implementiert. Letzteres besteht aus einem CFD-Modell, das die Messumgebung bei freier Konvektion nachbildet. Um das Kompaktmodell zu erstellen, wird das CFD-Modell um einen Betriebspunkt linearisiert. Das Kompaktmodell wird in ein echtzeitfähiges thermoelektrisches Modell transformiert und mittels eines Lastprofils unter variierenden Umgebungsrandbedingungen mit Messdaten verglichen und validiert. Es zeigt sich eine drastische Reduktion der Rechenzeit sowie eine hohe Genauigkeit des Kompaktmodells.

Sind technische Systeme modular aufgebaut und erfordern einen hohen Detaillierungsgrad in der thermischen Modellierung, bietet es sich an, das Ursprungssystem zu substrukturieren und die Substrukturen zu reduzieren. Die gängigen Methoden zur Reduktion und zur Rückkopplung in ein reduziertes Gesamtsystem werden hinsichtlich ihrer Stärken und Schwächen bewertet. Mittels einer in dieser Arbeit entwickelten, neuen, auf Faltung und Entfaltung basierenden Methodik, dem CoC-Verfahren, werden die Vorteile der Substrukturierung und der Kompaktmodellbildung vereint. Es zeigt sich eine hohe Genauigkeit, da durch die zeitdiskrete Faltung keine Abweichung durch ein ansonsten notwendiges Fitting an äquivalente Netzwerke entsteht. Das CoC-Verfahren wird an einem Invertermodul angewandt, das dazu in die Substrukturen B6-Brücke, Folienkondensator und Stromschienen aufgeteilt wird. Ein Kompaktmodell wird unter den Erkenntnissen der allgemeinen Randbedingungen aus dem ersten Hauptteil der Arbeit erstellt und validiert.



# Abstract

The present work shows different methods of compact thermal modeling, whereby the advantages of compact models based on thermal impedances ( $Z_{th}$ ) are worked out. It is shown, that with compact models, the temperature profile of complex thermal systems with variable boundary conditions can be almost exactly predicted.

With the aim of developing an impedance-based compact model of an accumulator, a detailed model is created first of all. For this purpose, the thermophysical parameters of a lithium-ion cell are evaluated from literature values and measurements, validated with an empirical power-loss model and implemented into the whole model. The latter consists of a CFD model, which reproduces the environmental conditions of the measurements at natural convection. To create the compact model the CFD-model is linearized around an operating point. The compact model is transformed into a real time thermoelectric model and compared to measurements with varying environmental boundary conditions by applying a load profile. It is shown that calculation time is reduced drastically and that a high accuracy of the compact model is reached.

If technical systems are module-based and require a high level of detail in thermal modeling, substructuring the original system to reduced subsystems offers many advantages. The usual methods for reduction and re-coupling into the complete system are assessed for their strengths and weaknesses. By means of a new methodology, based on convolution and deconvolution, the so called CoC-method, the advantages of substructuring and compact thermal modeling are combined. A high degree of accuracy is shown, as the time discrete convolution has no deviation in comparison to methods which require a fitting to an equivalent network. The CoC-method is applied to an inverter module, which is therefore separated into the substructures B6-bridge, film capacitor and current rails. A compact model is created under the findings of the general boundary conditions from the first main part of the work and finally validated.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>IV</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>VI</b>
<b>Abstract</b>	<b>VIII</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>XII</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation für thermische Kompaktmodelle . . . . .	1
1.2 Stand der Technik und Problemstellung . . . . .	3
1.2.1 Kompaktmodellerstellung . . . . .	3
1.2.2 Substrukturierung . . . . .	4
1.3 Gliederung und Ziele der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Grundlagen und Berechnungsmethoden in der Wärmeübertragung</b>	<b>7</b>
2.1 Wärmeleitung . . . . .	7
2.1.1 Fouriersches Gesetz . . . . .	8
2.1.2 Formen der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	8
2.2 Konvektion . . . . .	9
2.2.1 Kennzahlen bei erzwungener Konvektion . . . . .	10
2.2.2 Kennzahlen bei freier Konvektion . . . . .	11
2.3 Wärmestrahlung . . . . .	11
2.4 Rand- und Anfangsbedingungen . . . . .	12
2.4.1 Dirichletsche Randbedingung . . . . .	13
2.4.2 Neumannsche Randbedingung . . . . .	14
2.4.3 Robinsche Randbedingung . . . . .	14
2.4.4 Koppelbedingung . . . . .	14
2.4.5 Nichtlineare Randbedingungen . . . . .	15

2.5	Analytische Ansätze . . . . .	15
2.5.1	Stationäre eindimensionale Wärmeleitung, homogen . . . . .	15
2.5.2	Instationäre Wärmeleitung, inhomogen . . . . .	16
2.6	Thermische Netzwerkelemente . . . . .	18
2.6.1	Thermischer Widerstand . . . . .	19
2.6.2	Thermische Kapazität . . . . .	19
2.7	Numerische Berechnungsverfahren . . . . .	19
2.7.1	Finite-Elemente-Methode . . . . .	19
2.7.2	CFD . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Thermische Kompaktmodelle</b>	<b>23</b>
3.1	Kompaktmodelle durch MOR . . . . .	25
3.1.1	Block-Arnoldi-Verfahren . . . . .	25
3.1.2	Guyan-Verfahren . . . . .	25
3.1.3	Modale Reduktionsverfahren . . . . .	26
3.2	Kompaktmodelle aus konzentrierten Massen . . . . .	26
3.3	Kompaktmodelle auf Impedanzen basierend . . . . .	29
3.3.1	Thermische Impedanz . . . . .	29
3.3.2	Herleitung - Von der thermischen Impedanz zum Temperaturverlauf . . . . .	31
3.3.3	Thermisch äquivalente Netzwerke . . . . .	37
3.3.3.1	Foster-Netz . . . . .	38
3.3.3.2	Cauer-Netz . . . . .	39
3.3.3.3	Äquivalenzumformung . . . . .	39
3.3.3.4	Eigenschaften von Foster- und Cauer-Netzen . . . . .	40
3.3.4	Programmtechnische Umsetzung . . . . .	42
3.3.4.1	Zeitdiskrete Faltung . . . . .	42
3.3.4.2	Kubische Interpolation . . . . .	43
3.3.4.3	Programmablaufpläne der Methoden „SimTemp“ und „FosterFit“ . . . . .	43
3.3.5	Anwendung thermischer Kompaktmodelle . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Kompaktmodell eines Akkupacks</b>	<b>47</b>
4.1	Stand der Technik . . . . .	48
4.2	Zellmodell . . . . .	49

4.2.1	Thermisches Zellmodell . . . . .	49
4.2.2	Elektrisches Zellmodell . . . . .	52
4.2.3	Validierung des thermischen Zellmodells . . . . .	54
4.3	Thermisches Akkupackmodell . . . . .	56
4.4	Erstellung des Kompaktmodells . . . . .	59
4.4.1	Umwandlung in echtzeitfähiges Modell . . . . .	62
4.4.2	Analyse des Kompaktmodells . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Kopplung thermischer Kompaktmodelle</b>	<b>67</b>
5.1	Stand der Technik . . . . .	68
5.1.1	Component Mode Synthesis . . . . .	68
5.1.2	Domain Decomposition Method . . . . .	68
5.1.3	Substrukturierung mittels Guyan-Verfahren . . . . .	68
5.1.4	Substrukturierung mittels Arnoldi-Verfahren . . . . .	70
5.1.5	Kopplung Impedanz-basierter Kompaktmodelle . . . . .	71
5.2	Neuer Ansatz zur Kopplung von Zth-Modellen . . . . .	72
5.2.1	Herleitung des CoC-Verfahrens . . . . .	73
5.2.1.1	Kopplung des n-ten Interface-Knotens . . . . .	74
5.2.1.2	Kopplung weiterer Interface-Knoten . . . . .	76
5.2.2	Programmtechnische Umsetzung . . . . .	77
5.2.2.1	Programmablaufplan der Methode „Koppeln“ . . . . .	78
5.2.3	Benchmark des CoC-Verfahrens . . . . .	80
5.2.3.1	Beschreibung der Referenzsysteme . . . . .	80
5.2.3.2	Testfall 1 - Kopplung genau <i>eines</i> Interfaceknotens . . . . .	83
5.2.3.3	Testfall 2 - Kopplung von vier Interfaceknoten . . . . .	85
5.2.3.4	Testfall 3 - Arithmetische Mittelung der Interfaceknoten bei inhomogener Temperaturverteilung . . . . .	87
5.2.3.5	Testfall 4 - Arithmetische Mittelung der Interfaceknoten bei homogener Temperaturverteilung . . . . .	89
5.2.3.6	Testfall 5 - Lineare Interpolation . . . . .	90
5.2.3.7	Testfall 6 - Kubische Interpolation . . . . .	90
5.2.3.8	Testfall 7 - Extrapolation bei stark abweichende Zeit- konstanten . . . . .	92
5.2.3.9	Testfall 8 - Adiabates Subsystem . . . . .	94
5.2.3.10	Testfall 9 - Referenz für Testfälle 10 und 11 . . . . .	96

5.2.3.11	Testfall 10 - Gewichtete Mittelung an <i>einem</i> Interface .	98
5.2.3.12	Testfall 11 - Gewichtete Mittelung an beiden Interfaces	100
5.2.3.13	Testfall 12 - Kopplung über äquivalentes Cauer-Netz .	102
5.2.3.14	Abschließende Bewertung des CoC-Verfahrens . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Substrukturierung und Kopplung eines Invertermoduls</b>	<b>107</b>
6.1	Beschreibung des FE-Modells . . . . .	109
6.2	Erstellen der Substrukturimpedanzen . . . . .	110
6.3	Verifikation und Ergebnisse . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>127</b>



# Nomenklatur

## Mathematische Operatoren

$\dot{T}$	zeitliche Ableitung
$T_x$	Einfache Ableitung in x-Richtung
$T_{xx}$	Zweifache Ableitung in x-Richtung
$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	Nabla-Operator
$\Delta$	Differenz, <i>nicht Laplace-Operator</i>
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ etc.	fett, groß: Matrizen
$(x, y, z)$	Zeilenvektor
$\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}$ etc.	fett, klein: Vektoren, <i>Ausnahme Temperaturvektor <math>\mathbf{T}</math></i>
$\theta$	Sprungfunktion
$\delta$	Dirac-Impuls

## Physikalische Größen

$\alpha$	W/m <sup>2</sup> /K	Wärmeübergangskoeffizient
$a$	m <sup>2</sup> /s	Temperaturleitfähigkeit
$Bi$		Biot-Zahl
$c$	J/kg/K	spezifische Wärmekapazität
$C_{\text{th}}$	J/K	thermische Kapazität
$\epsilon$		Emissionsgrad, Absorptionsgrad
$\phi$	W	Wärmestrom
$\boldsymbol{\phi}$	W	Lastvektor mit $\phi_i$
$\gamma$	1/K	Volumenausdehnungskoeffizient
$g$	m/s <sup>2</sup>	Erdbeschleunigung
$I$	A	elektrischer Strom
$\lambda$	W/m/K	Wärmeleitfähigkeit
$m$	kg	Masse
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	kinematische Viskosität
$N$		Formfunktion
$Nu$		Nusselt-Zahl
$p$	Pa	Druck
$\mathbf{p}$	W	Lastvektor mit $P_i$
$P$	W	Leistung

$Pr$		Prantl-Zahl
$q$	$\text{W/m}^2$	auf Fläche bezogene Wärmestromdichte
$\mathbf{q}$	$\text{W/m}^2$	Wärmestromdichtefeld
$Q$	J	Wärme
$\rho$	$\text{kg/m}^3$	Dichte
$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$		Ortsvektor in kartesischen Koordinaten
$Re$		Reynolds-Zahl
$R_{\text{th}}$	$\text{K/W}$	thermischer Widerstand
$\mathbf{s}$		Allgemeiner Lastvektor
$t$	s	Zeit
$T$	$^{\circ}\text{C}$	Temperatur
$U$	V	elektrische Spannung
$U_i$	J	innere Energie
$w$	$\text{W/m}^3$	auf Volumen bezogene Wärmestromdichte
$W$	W	Mechanische Arbeit
$\hat{T}$	K	Absolute Temperatur
$\mathbf{T}$		Temperaturvektor
$x, y, z$		kartesische Ortskoordinaten
$\mathbf{Z}$		Impedanzmatrix
$Z_{\text{th}}$	$\text{K/W}$	thermische Impedanz

## Tiefgestellte Indizes

b	bulk
i	Interface
m	master
s	slave
th	thermisch
v	Verlust
$i, j, m, n$	klein, kursiv, durch Komma getrennt: Zählindizes
$I, J, M, N$	groß, kursiv, durch Komma getrennt: Endwerte der Zählindizes

## Abkürzungen

AB	Anfangsbedingung
APDL	Ansys Programming Design Language
DCB	Direct Copper bonded
DGL	Differentialgleichung
FEM	Finite-Elemente-Methode
HLP	Hochstrom-Lastprofil

---

MOR	Modellordnungsreduktion
RB	Randbedingung
SoC	State of Charge
TCM	Thermisches Kompaktmodell

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation für thermische Kompaktmodelle

Seit jeher gibt es die Bestrebung elektronische Systeme kompakter zu gestalten und gleichzeitig deren Leistungsfähigkeit zu erhöhen, woraus sich eine zunehmende Leistungsdichte und somit höhere Anforderungen an die Wärmeabfuhr ableiten. Die aktiven, dissipierenden Bauteile haben durch den begrenzten Bauraum einen geringen räumlichen Abstand zueinander, wodurch des Weiteren eine hohe thermische Kopplung hinzukommt. Die thematisierten elektronischen Systeme in der vorliegenden Arbeit sind leistungselektronische Systeme im weiter gefassten Sinn. Es handelt sich dabei um einen Akkupack für ein Elektrowerkzeug und um ein Wechselrichtermodul im Antriebsstrang eines Elektrofahrzeugs. Beide Systeme erfordern ein tiefes Verständnis der thermischen Wirkzusammenhänge.

Die in dem Akkupack verbauten Lithium-Ionen-Zellen haben eine optimale Betriebstemperatur im Bereich von  $20^{\circ}\text{C}$  -  $40^{\circ}\text{C}$  [86]. Unterhalb dieses Temperaturfensters erhöht sich der Innenwiderstand der Zellen, wodurch die Leistungsfähigkeit der Batterie sinkt. Zudem kann sogenanntes Lithium-Plating einhergehend mit Dendritenbildung zur Kapazitätsverminderung und im schlimmsten Fall zu einem inneren Kurzschluss führen. Oberhalb des Temperaturfensters tritt eine beschleunigte Alterung auf, die durch die Arrhenius-Gleichung beschrieben wird. Danach halbiert sich die Lebensdauer schätzungsweise bei einer Temperaturerhöhung um 10K. Mit Überschreiten der spezifizierten Maximaltemperatur kann sich der Elektrolyt zersetzen und eine Kettenreaktion auslösen, die thermisches Durchgehen (thermal runaway) genannt wird und zur Entflammung der Zellen führt. Abbildung 1.1 zeigt ein Smartphone nach thermischem Durchgehen durch einen internen Kurzschluss im Akku.

Die Funktionsfähigkeit des Wechselrichtermoduls wird in ähnlichem Maße wie der Akkupack von der Systemtemperatur beeinflusst. Selbst bei heute üblichen hohen Wirkungsgraden von 98% müssen Leistungshalbleiter wie IGBTs Schalt- und Durchlassverluste über eine kleine Fläche z.B.  $1\text{ cm}^2$  abführen, wodurch die Wärmeflussdichte die einer Kochplatte um das 10-fache übersteigt [58]. An die Aufbau- und Verbindungstechnik sind somit hohe Anforderungen bezüglich Wärmeleitfähigkeit und Lastwechselfestigkeit gestellt. Auf Chiperebene kann thermisches Zyklisieren beispielsweise zum Ablösen der Bonddrähte, wie in Abbildung 1.2 dargestellt, sowie Rissen und Lunkern in der Lotschicht des Chips führen. Auf Modulebene führt die Variation der Kühlwassertemperatur zur mechanischen Ermüdung in den Lotschichten und der Wärmeleitpaste. Gleichzeitig zeugt eine zu geringe Systemtemperatur von einer Überdimensionierung des Kühlkörpers, welche zu höherem Gewicht und höheren Kosten führt.



Abbildung 1.1: Thermisches Durchgehen, nachdem eine Smartphone-Zelle auf einer Herdplatte überhitzt wurde. Quelle: Simulationsexperiment der Hochschule Landshut, 2016.

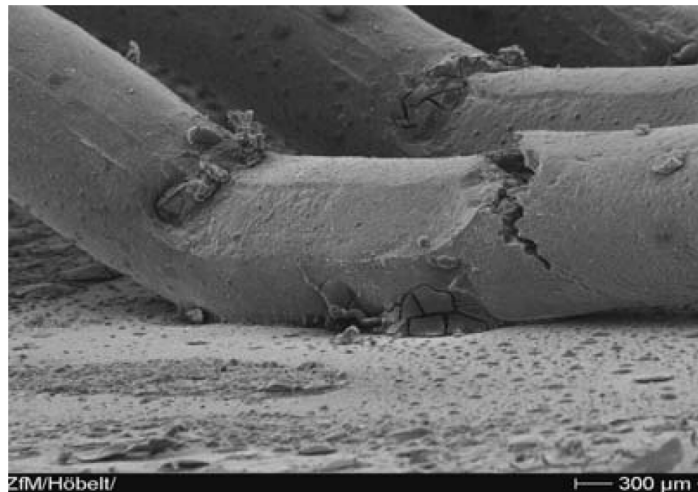


Abbildung 1.2: Abdruck eines abgelösten Bonddrahts sowie Querriss in einem weiten Bond einer Diode nach 75000 Lastwechseln bei  $\Delta T = 105\text{K}$  [58].

Hinsichtlich Zuverlässigkeit und Lebensdauer ist es daher unabdingbar die maximalen Betriebstemperaturen zu kennen. Gleichzeitig darf aus Gründen der Wirtschaftlichkeit und Effizienz die Betriebstemperatur nicht zu weit unterhalb der zulässigen Höchsttemperatur liegen. Somit ist es notwendig, ein akkurates thermisches Modell zu entwickeln, das insbesondere den transienten Temperaturverlauf exakt abbildet.

Getrieben durch kürzere Produktzyklen beschleunigt sich der Entwicklungsprozess, was Simulationen bereits in frühen Entwicklungsphasen unabdingbar macht. Im Gegensatz zu zeitaufwändigen Messreihen birgt die Simulation den Vorteil, dass Varianten schnell verglichen und das Produkt somit noch vor dem Bau eines Prototyps optimiert werden kann. Neben dem stationären Zustand, der in leistungselektronischen Systemen oft nicht erreicht wird, ist vor allem die transiente Analyse durch kurzzeitige Impulsbelastung wichtig. Die in dieser Arbeit betrachteten Systeme sind solche dynamischen Systeme.

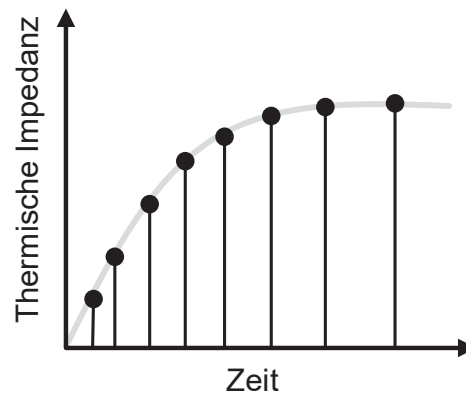


Abbildung 1.3: Zeitdiskrete thermische Impedanz.

Oft sind detaillierte dynamische Modelle rechenzeitaufwändig, weshalb es sinnvoll ist Ansätze zur kompakten Modellierung zu entwickeln.

Realen Systemen sowie deren Modellen ist es gemein, dass sie unter Annahme der Linearität durch ihre Sprungantwort charakterisiert werden können. Ein Halbleiterchip wird beispielsweise mit einer Verlustleistung beaufschlagt, wodurch sich als Sprungantwort ein zeitlicher Verlauf des Temperaturhubs ergibt. Nach Normierung, d.h. Division der Sprungantwort durch die Verlustleistung erhält man die sogenannte thermische Impedanz  $Z_{th}$  [84]. Zum Erzeugen der Impedanzen können Messungen oder Simulationen verwendet werden. Als Folge von endlichen Sample-Raten bei Messungen und definierten Ausgabezeitschritten von Simulationen, liegen Sprungantworten oft nur zu diskreten Zeitpunkten vor, wie Abbildung 1.3 zeigt. Die kompakten thermischen Modelle des Akkupacks und des Wechselrichtermoduls in dieser Arbeit basieren auf eben solchen „zeitdiskreten“ Impedanzen.

## 1.2 Stand der Technik und Problemstellung

### 1.2.1 Kompaktmodellerstellung

Kompaktmodelle basierend auf thermischen Impedanzen finden üblicherweise in der Leistungselektronik Anwendung, wie ein Auszug aus dem Datenblatt eines MOSFETs, stellvertretend für eine Vielzahl an Leistungshalbleitern, zeigt, siehe Abbildung 1.4. Sie werden dazu benutzt, um komplexe Lastkollektive über lange Zeiträume zu berechnen oder um beispielsweise auf einem Microcontroller die Temperatur an kritischen Stellen im System zu überwachen. Jedoch sind solch Kompaktmodelle nicht an den ursprünglichen Einsatzzweck gebunden und können auch auf thermische Systeme anderer Domänen, wie z.B. zur Temperaturüberwachung eines Akkupacks angewendet werden [37].

Der in dieser Arbeit betrachtete Akkupack besteht aus zehn einzelnen Lithium-Ionen-Zellen, deren Temperatur im Betrieb überwacht werden muss. Da die Zellkerntemperatur nicht gemessen werden kann und sich nur ein Sensor im gesamten Pack befindet,

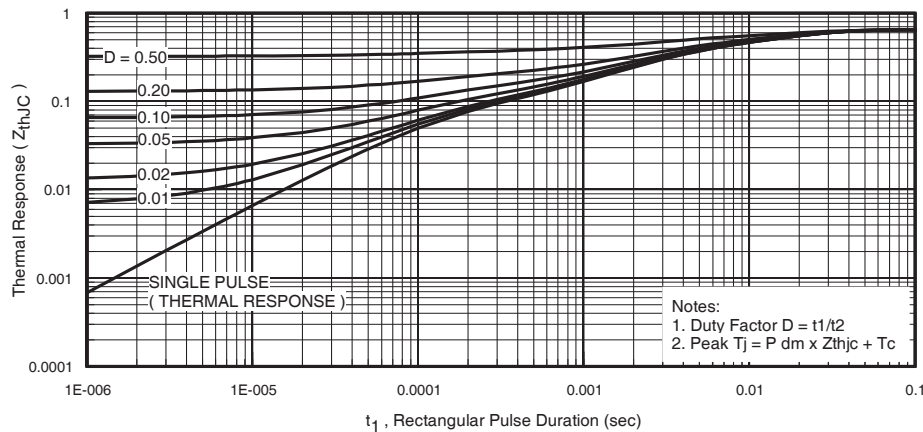


Abbildung 1.4: Maximale effektive Impedanz der Sperrschicht zum Gehäuse (JC für engl. Junction-Case) eines Leistungs-MOSFETs [13].

muss hier auf thermische Modelle zurückgegriffen werden. Es ist deswegen notwendig ein detailliertes thermisches Zellmodell, sowie ein Modell des gesamten Packs, mit dem man die Koppeleffekte zwischen den einzelnen Zellen analysieren kann, zu erstellen. Wie eingangs erwähnt, können nur lineare Systeme durch ihre Sprungantwort charakterisiert werden. Jedoch gibt es nichtlineare Effekte z.B. die Abhängigkeit der Verlustleistung von der Zelltemperatur, freie Konvektion und Wärmestrahlung. Die Überführung des detaillierten Modells in ein Kompaktmodell soll unter diesen Einflüssen adressiert werden.

## 1.2.2 Substrukturierung

Des Weiteren finden sich Bestrebungen detaillierte Modelle in Substrukturen zu unterteilen, diese zu reduzieren und die reduzierten Modelle wieder zu koppeln. Dieser „Substrukturierung“ genannte Prozess bietet u.a. den Vorteil, dass der Reduktionsprozess der Substrukturen weniger Zeit benötigt als die Reduktion des gesamten Systems auf einmal. Substrukturierung ist in der Modellordnungsreduktion mechanischer Systeme, z.B. Werkzeugmaschinen [59], ein gängiges Verfahren, das auf thermische Problemstellungen, z.B. MEMS-Strukturen (micro-electro-mechanical systems) wie in Abbildung 1.5 dargestellt, bereits übertragen wurde.

Die der Substrukturierung zugrundeliegende Idee wurde bereits auf impedanzbasierte Kompaktmodelle übertragen. Am Beispiel eines IGBT-Moduls wird z.B. die thermische Impedanz des gesamten Systems aus den einzelnen Impedanzen der Systemkomponenten Chip und Kühlkörper zusammengesetzt [57]. Hierbei handelt es sich jedoch um eine schlichte Addition der Einzel-Impedanzen, konstante Randbedingungen und eindimensionale Wärmeleitung vorausgesetzt. Werden die Anwendungsfälle komplexer, durch z.B. mehrere untereinander gekoppelte Wärmequellen oder variierende Randbedingungen, gibt es zwar bereits Methoden der Kompaktmodellerstellung, jedoch fehlt ein Verfahren zur Kopplung der Kompaktmodelle. Ein solches Verfahren würde die Vor-

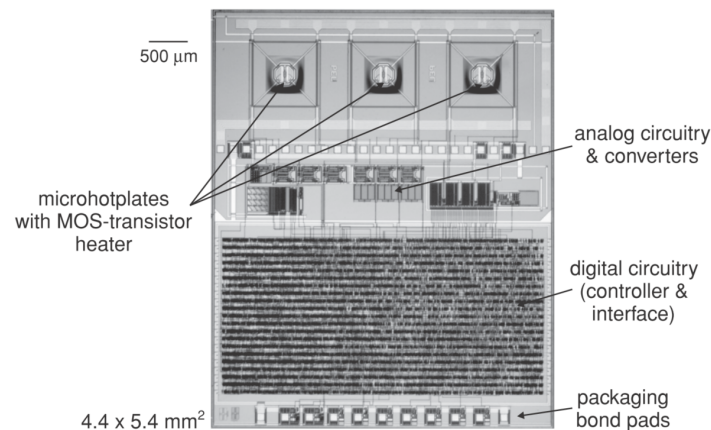


Abbildung 1.5: Mikroskopaufnahme eines Gas-Sensors mit mikroskopisch kleinen Heizelementen und Schaltkreisen [7].

teile der Kompaktmodellierung mit den Vorteilen der Substrukturierung kombinieren und soll deswegen ein Ziel dieser Arbeit sein.

## 1.3 Gliederung und Ziele der Arbeit

Abbildung 1.6 zeigt die Gliederung des Hauptteils der vorliegenden Arbeit. In Kapitel 2 werden die Grundlagen zur thermischen Modellerstellung im Allgemeinen dargestellt. Kapitel 3 beinhaltet die Grundlagen der thermischen Kompaktmodellerstellung, wobei verschiedene Methoden erläutert und verglichen werden. Vorteile und neue Entwicklungen impedanzbasierter Kompaktmodelle werden ausgearbeitet. Abschließend wird ein objektorientiertes Programm zur Erstellung, Kopplung und Simulation von Kompaktmodellen realisiert. In Kapitel 4 wird zunächst ein CFD-Modell eines Akkupacks erstellt und validiert. Anhand dieses Modells wird aufgezeigt, wie ein nichtlineares CFD-Modell in ein kompaktes Modell überführen werden kann. Nach Validierung der Kompaktmodellierung wird ein komplexes Lastkollektiv simuliert.

Kapitel 5 behandelt die Methode der Substrukturierung, d.h. die Reduktion der Komplexität des Gesamtsystems durch Unterteilung in Substrukturen. Dabei werden die Substrukturen reduziert und zu einem reduzierten Gesamtsystem zurück gekoppelt. Nach Erläuterung der gängigen Methoden wird ein neues Verfahren zur Kopplung thermischer Kompaktmodelle vorgestellt und validiert. Dabei werden die Chancen und Grenzen des Verfahrens aufgezeigt. In Kapitel 6 wird die Methodik auf die Substrukturen eines Wechselrichtermoduls angewandt. Im Gegensatz zum Akkupack wird auf ein bereits existierendes und validiertes FE-Modell zurückgegriffen.

Die Ziele der vorliegenden Arbeit lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Einordnung und Vergleich der Verfahren zu Erstellung von Kompaktmodellen
- Vergleich gängiger Substrukturierungsverfahren



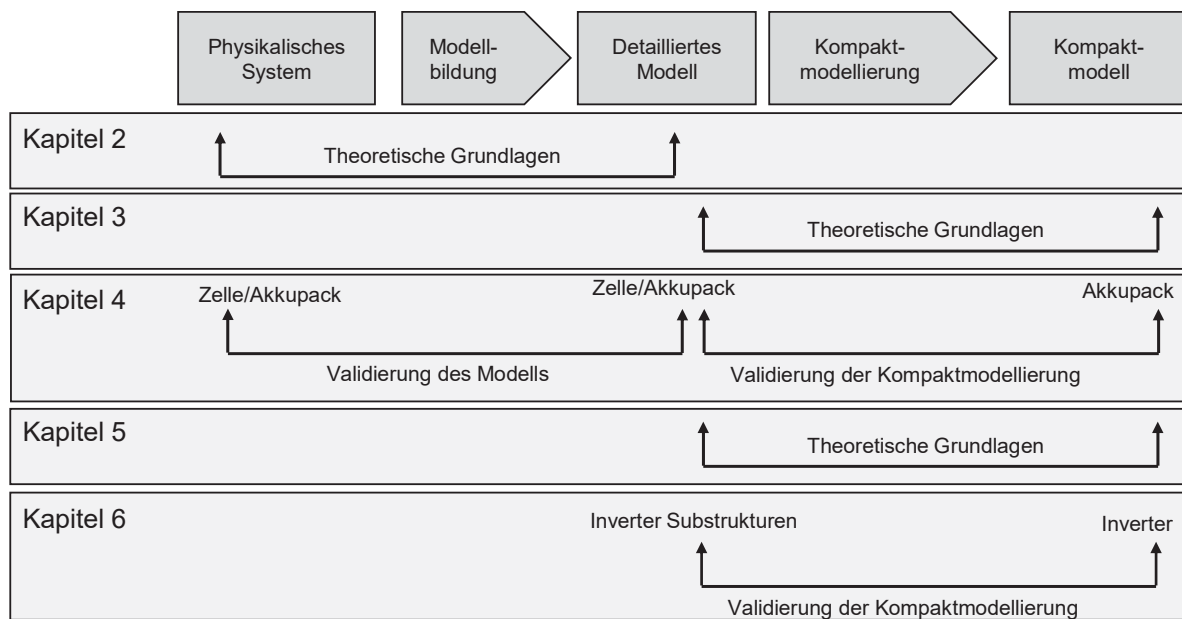


Abbildung 1.6: Strukturierung der Arbeit.

- Entwicklung eines neuartigen Verfahrens zur Kopplung thermischer Kompaktmodelle (Coupling of Compact Thermal Models by Convolution and Deconvolution, kurz CoC-Verfahren)
- Entwicklung eines Tools zur Erstellung, Kopplung und Simulation thermischer Kompaktmodelle
- Erstellung eines detaillierten thermischen Modells eines Akkupacks bestehend aus Lithium-Ionen-Zellen
- Erstellung eines Kompaktmodells des Akkupacks aus dem detaillierten Modell
- Substrukturierung eines Wechselrichtermoduls zur Anwendung des CoC-Verfahrens

## 2 Grundlagen und Berechnungsmethoden in der Wärmeübertragung

„Noch nie hat ein Mensch Wärme zu Gesicht bekommen; niemals wird er sie je sehen, riechen oder spüren können.“ Dieses Zitat von Elliott Lieb und Jakob Yngvason (Lieb & Yngvason 1999) spiegelt wider, dass der Begriff Wärme im Alltag oft gebraucht wird, er jedoch nur schwer zu definieren ist. Die eindeutige Definition des Begriffs Wärme bei einem nicht im Gleichgewichtszustand befindlichen System kann nur erfolgen, wenn die Umgebung mitberücksichtigt wird [82].

Eine adiabatische Zustandsänderung liegt dann vor, wenn sich außerhalb des betrachteten thermodynamischen Systems nichts ändert, außer der Lage eines Gewichts im Schwerfeld. Treibt beispielsweise ein herabsinkendes Gewicht einen Propeller an, der ein im System befindliches Gas mit der inneren Energie  $U_{i1}$  erhitzt, ändert sich die innere Energie im System um die verrichtete Arbeit  $W = U_{i2} - U_{i1}$ .

Man spricht von Wärme, wenn ein System mit der inneren Energie  $U_{i1}$  in einen Zustand mit der inneren Energie  $U_{i2}$  übergeht, wobei die einzige Veränderung außerhalb des Systems darin besteht, dass sich die innere Energie eines Reservoirs um  $Q$  verändert hat. Die Wärme berechnet sich dann zu  $Q = U_{i2} - U_{i1}$ .

Ohne Betrachtung der Umgebung wäre es also nicht möglich zu sagen, ob sich die innere Energie durch das Verrichten von Arbeit oder durch Wärme geändert hat. Eine allgemeine Zustandsänderung wird durch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$U_{i2} - U_{i1} = W + Q \quad (2.1)$$

beschrieben. Hierbei ist  $W$  die Arbeit durch die Lageänderung eines Gewichts in der Umgebung zusätzlich zur Änderung der inneren Energie des Reservoirs  $Q$ .

Wenn zwei Körper (auch Reservoirs) in Kontakt treten, wird stets Wärme vom Körper höherer Temperatur auf den Körper niedriger Temperatur übertragen. Diese, der Intuition entsprechende Feststellung, kann aus dem sogenannten Entropieprinzip hergeleitet werden [56].

Im folgenden Abschnitt werden die Grundlagen zur Wärmeübertragung und zu den in dieser Arbeit verwendeten Berechnungsmethoden erklärt [67].

### 2.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung (auch Konduktion genannt) ist der Energietransport in einem Feststoff oder ruhenden Fluid, aufgrund eines Temperaturgefälles. Es wird dazu kein makro-

Stoff (Festkörper)	$\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$	Stoff (Fluid)	$\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$
Kupfer	399	Wasser	0,598
Aluminium	209	Luft	0,0257

Tabelle 2.1: Wärmeleitfähigkeit ausgewählter Stoffe bei 20°C und 1bar [34].

skopischer Stofftransport wie etwa bei der Konvektion benötigt. In Isolatoren beruht Wärmeleitung auf der Übertragung von Gitterschwingungen auf benachbarte Atome. In Metallen fungieren zusätzlich freie Elektronen, die auch für die elektrische Leitfähigkeit verantwortlich sind, als Energieträger. Metalle sind darum deutlich bessere Wärmeleiter als Isolatoren. In Fluiden wird die Energie bei der Wärmeleitung durch Stöße zwischen den Molekülen übertragen. Gase sind dabei deutlich schlechtere Wärmeleiter als Flüssigkeiten.

Die charakterisierende Eigenschaft eines Stoffes bezüglich seiner Fähigkeit Wärme zu leiten wird als Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  bezeichnet. Sie hängt vom Werkstoff, der Temperatur und bei Gasen vom Druck ab und ist für einen isotropen Werkstoff ein Skalar. Ist die Leitfähigkeit eines Materials richtungsabhängig (anisotrop), ist  $\lambda$  ein Tensor zweiter Ordnung. Die Wärmeleitfähigkeit ist bei fast allen Stoffen temperaturabhängig. Bei Gasen, wie z.B. Luft, steigt diese in der Regel mit der Temperatur an. In Tabelle 2.1 finden sich Werte für die Wärmeleitfähigkeit ausgewählter Stoffe.

### 2.1.1 Fouriersches Gesetz

Das Fouriersche Gesetz wurde 1807 vom französischen Physiker und Mathematiker Joseph Fourier entdeckt. Es beschreibt die makroskopischen Vorgänge bei der Wärmeleitung. Danach gilt in einem homogenen, isotropen Festkörper, dass die Wärmestromdichte  $q$  proportional zum negativen Temperaturgradienten ist. Im eindimensionalen Fall folgt für die Wärmestromdichte in x-Richtung durch eine normal orientierte, isotherme Fläche  $A$  mit dem Wärmestrom  $\phi$

$$q = \frac{\phi}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.2)$$

Im Fall mehrerer Raumkoordinaten ergibt sich das Wärmestromdichte-Vektorfeld für einen homogenen Körper mit dem skalaren Temperaturfeld  $T(x, y, z) = T(\mathbf{r})$  zu

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Formen der Wärmeleitungsgleichung

Die Anwendung des Fourierschen Gesetzes und des Energieerhaltungssatzes auf ein infinitesimal kleines Volumenelement führt im allgemeinen Fall der dreidimensionalen,

instationären Wärmeleitung mit Wärmequellen bzw. Senken zur sogenannten Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c \dot{T}(\mathbf{r}, t) - w(\mathbf{r}, t, T) = \nabla(\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t)) \quad (2.4)$$

mit den Stoffwerten spezifische Wärmekapazität  $c = c(\mathbf{r}, T)$  in  $[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}]$ , Dichte  $\rho = \rho(\mathbf{r}, T)$  in  $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$  und Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, T)$  in  $[\frac{\text{W}}{\text{m K}}]$  sowie der volumetrischen Wärmestromdichte  $w$  in  $[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}]$ .

Es handelt sich hierbei um eine parabolische, partielle Differentialgleichung (DGL). Die thermophysikalischen Stoffeigenschaften sind im allgemeinen temperatur- und ortsabhängig, der Quellterm kann zusätzlich noch zeitabhängig sein. Die Temperaturabhängigkeit führt zu einem nichtlinearen Differentialoperator, weswegen obige Gleichung nichtlinear ist. Sind Werkstoffeigenschaften und Quellterm temperaturunabhängig, vereinfacht sich die Gleichung zur linearen Wärmeleitungsgleichung. Weiter folgt im Falle eines homogenen Berechnungsgebiets, d.h. ortsunabhängiger Stoffwerte

$$\rho c \dot{T}(\mathbf{r}, t) - w(\mathbf{r}, t) = \lambda \nabla^2 T(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Im stationären Fall vereinfacht sich obige Gleichung dann zur Poisson-Gleichung:

$$\lambda \nabla^2 T(\mathbf{r}) + w(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.6)$$

Fällt des Weiteren der Quellterm weg, spricht man von der Laplace-Gleichung:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.7)$$

## 2.2 Konvektion

Konvektion bezeichnet die Übertragung von Wärme in einem strömenden Fluid durch die Überlagerung von Wärmeleitung aufgrund eines Temperaturgradienten und die makroskopische Bewegung des Fluids. Man unterscheidet zwischen erzwungener Konvektion, bei der der Teilchentransport durch äußere Einwirkungen hervorgerufen wird und freier oder natürlicher Konvektion, bei der der Teilchentransport aufgrund von Dichtegradienten im Fluid erfolgt. In beiden Fällen spielen sich die Vorgänge der Wärmeübertragung in den Grenzschichten ab. Analog zum Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung, gilt bei Konvektionsvorgängen das Newtonsche Abkühlungsgesetz

$$q(x) = \alpha(T_W - T_\infty) \quad (2.8)$$

mit der Wand- und Fluidtemperatur  $T_W$  und  $T_\infty$ . Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  in  $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  (engl. Heat Transfer Coefficient) stellt den Proportionalitätsfaktor zwischen der Temperaturdifferenz und dem Wärmestrom dar, wobei  $\alpha$  von einer Vielzahl von Faktoren, wie beispielsweise der Strömungsgeschwindigkeit, den geometrischen Verhältnissen

oder der Art des Fluids abhängig ist, siehe auch [41]. Aufgrund der genannten Abhängigkeiten ist die Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten nur in einfachen Fällen durch Lösen der partiellen Differentialgleichungen analytisch möglich. Jedoch gibt es eine Vielzahl von empirische Korrelationen, die bei einfachen Geometrien Anwendung finden und für die meisten Fälle ausreichende Näherungslösungen liefern, siehe beispielsweise [88]. Diese Gleichungen basieren auf dimensionslosen Kennzahlen, die verschiedene Anwendungsfälle, d.h. Geometrien und Strömungsverhältnisse, vergleichbar machen. Eine wichtige Kennzahl ist die Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda_{\infty}}, \quad (2.9)$$

die das Verhältnis aus dem Wärmestrom infolge Konvektion und dem Wärmestrom infolge reiner Wärmeleitung durch das Fluid darstellt.

Die Biot-Zahl beschreibt im Gegensatz zur Nusselt-Zahl das Verhältnis von Konvektion zur Wärmeleitung des Festkörpers mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_F$ :

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda_F}. \quad (2.10)$$

Ist die Biot-Zahl beispielsweise groß, deutet dies auf einen hohen Temperaturgradienten innerhalb des Festkörpers hin. Des Weiteren soll die Prantl-Zahl nicht unerwähnt bleiben, die das Stoffwertverhältnis aus kinematischer Viskosität  $\nu$  und der Temperaturleitfähigkeit  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  bezeichnet:

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad (2.11)$$

Man kann diese auch als Verhältnis zwischen diffusivem Impuls- und diffusivem Wärmetransport interpretieren.

### 2.2.1 Kennzahlen bei erzwungener Konvektion

Eine wesentliche Kennzahl bei erzwungener Konvektion (auch Zwangskonvektion) ist durch die Reynolds-Zahl gegeben. Sie ist durch

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad (2.12)$$

definiert, mit der Strömungsgeschwindigkeit  $v$ , der charakteristischen Länge  $L$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$ . So sind zum Beispiel zwei Strömungen in Rohren unterschiedlichen Durchmessers ähnlich, wenn die Reynolds-Zahl  $Re$  in beiden Fällen übereinstimmt. Der Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung wird durch eine kritische Reynolds-Zahl markiert, die z.B. im Falle einer Rohrströmung ca. 2300 beträgt [88]. Zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten gibt es eine Vielzahl von Nusselt-Korrelation bei erzwungener Konvektion, wobei stets gilt

$Nu = Nu(Re, Pr, \text{Geometrie})$  [8]. Typische Werte liegen für Luft im Bereich von  $10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  bis  $100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  und für Wasser  $500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  bis  $10.000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ , wobei der große Unterschied zwischen Luft und Wasser insbesondere durch die größere kinematische Viskosität und die kleinere Wärmeleitfähigkeit der Luft zustande kommt.

### 2.2.2 Kennzahlen bei freier Konvektion

Bei freier Konvektion (auch Naturkonvektion) werden Fluidteilchen mit geringerer Dichte als die der Umgebung durch eine Auftriebskraft bewegt, die sich aus dem Gleichgewicht von Zähigkeits- und Auftriebskraft ergibt. Im Unterschied zur Zwangskonvektion ist die Geschwindigkeits-Grenzschicht größer als die thermische Grenzschicht, da aufgrund der Zähigkeit benachbarte Fluidteilchen mitgerissen werden. Zudem ist die Strömungsgeschwindigkeit um ein Vielfaches geringer als bei erzwungener Konvektion. Das Verhältnis aus Auftriebs- und Zähigkeitskraft wird durch die Grashof-Zahl beschrieben:

$$Gr = \frac{g\gamma(T_W - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (2.13)$$

mit dem Volumenausdehnungskoeffizient  $\gamma$  und der Erdbeschleunigung  $g$ . Für die Nusselt-Zahl gilt analog zur erzwungen Konvektion  $Nu = Nu(Gr, Pr)$ . Der laminar-turbulente Umschlag kann über die Rayleigh-Zahl

$$Ra = GrPr \quad (2.14)$$

berechnet werden und liegt bei etwa  $10^9$ . Wärmeübergangskoeffizienten bei freier Konvektion in Luft liegen typischerweise bei  $3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  bis  $20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  [88].

Fällt die Verlustleistung gering aus und ist eine genügend große wärmeabführende Fläche vorhanden, können beispielsweise leistungselektronische Systeme alleine über freie Konvektion gekühlt werden, ohne zusätzlich in einen Lüfter zu investieren. Dabei sind Nusselt-Korrelationen zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten nur für idealisierte Bedingungen verfügbar. Sobald sich das System in einem Gehäuse befindet, aus mehreren Wärmequellen besteht oder von einfachen geometrischen Formen abweicht, stellen sich weit von Idealbedingungen entfernte Strömungsverhältnisse ein. Analytische sowie halb-empirische Lösungen sind in diesem Falle aufgrund der Komplexität nicht zielführend, weshalb auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss.

## 2.3 Wärmestrahlung

Ein weiterer Wärmeübertragungsmechanismus stellt die Wärmestrahlung dar [8]. In diesem Fall findet die Energieübertragung eines Körpers aufgrund seiner positiven thermodynamischen Temperatur  $\hat{T}[K] = T[^\circ\text{C}] + 273,15$  durch elektromagnetische Wellen statt. Die maximale Strahlung, die ein Körper abgeben kann, ist durch

$$q = \sigma \hat{T}^4 \quad (2.15)$$

gegeben. Die darin enthaltene Stefan-Boltzmann-Konstante  $\sigma$  hat einen Wert von ungefähr  $5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ . Ein Körper, dessen abgegebene Wärmestromdichte diesen Maximalwert erreicht, wird „Schwarzer Strahler“ genannt. Ebenso absorbiert ein solcher Körper alle auftreffende Strahlung. In der Realität gibt es jedoch keine solchen idealen Strahler bzw. Absorber. Mit dem materialspezifischen Emissionsgrad  $0 < \epsilon < 1$  wird Gleichung 2.15 angepasst:

$$q = \sigma \epsilon \hat{T}^4. \quad (2.16)$$

Für die Wärmeübertragung muss deshalb beachtet werden, dass zwei Körper stets im Strahlungsaustausch zueinander stehen. Dabei ist der Wärmestrom, der netto vom Körper höherer Temperatur auf den Körper niedrigerer Temperatur übergeht, von besonderem Interesse. Für einen Körper der Fläche  $A_W$ , der von einer deutlich größeren Fläche  $A_\infty \gg A_W$  umschlossen ist, gilt für den Netto-Wärmestrom  $\phi$  vom Körper zur Umgebung:

$$\phi = \sigma \epsilon_W A_W (\hat{T}_W^4 - \hat{T}_\infty^4) = \alpha_{\text{str}} (T_W - T_\infty) \quad (2.17)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten für Strahlung  $\alpha_{\text{str}} = \sigma \epsilon_W (\hat{T}_W + \hat{T}_\infty)(\hat{T}_W^2 + \hat{T}_\infty^2)$ . In geometrisch komplizierteren Fällen, kann der Strahlungsaustausch über sogenannte Sichtfaktoren, wie z.B. im VDI-Wärmeatlas gelistet [88], berechnet werden [34].

## 2.4 Rand- und Anfangsbedingungen

Nur durch die Vorgabe von Randbedingungen kann das Temperaturfeld eines Körpers durch Lösung der zugehörigen DGL eindeutig bestimmt werden. Man unterscheidet für gewöhnlich zwischen drei verschiedenen Arten von Randbedingungen, die sich jeweils aus der Energiebilanz über den Rand des Gebietes  $\partial\Omega = \Gamma$  ergeben [35]. Alle linearen Randbedingungen (kurz RB) lassen sich als Spezialfall von

$$a(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (2.18)$$

interpretieren. Die speziellen Randbedingungen lassen sich dann durch folgende Koeffizienten ableiten:

Dirichlet-RB:	$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = 0$
Neumann-RB:	$a(\mathbf{r}) = 0$
Robin-RB:	$a(\mathbf{r}) \neq 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(\mathbf{r}) \neq 0$
Homogene RB:	$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$

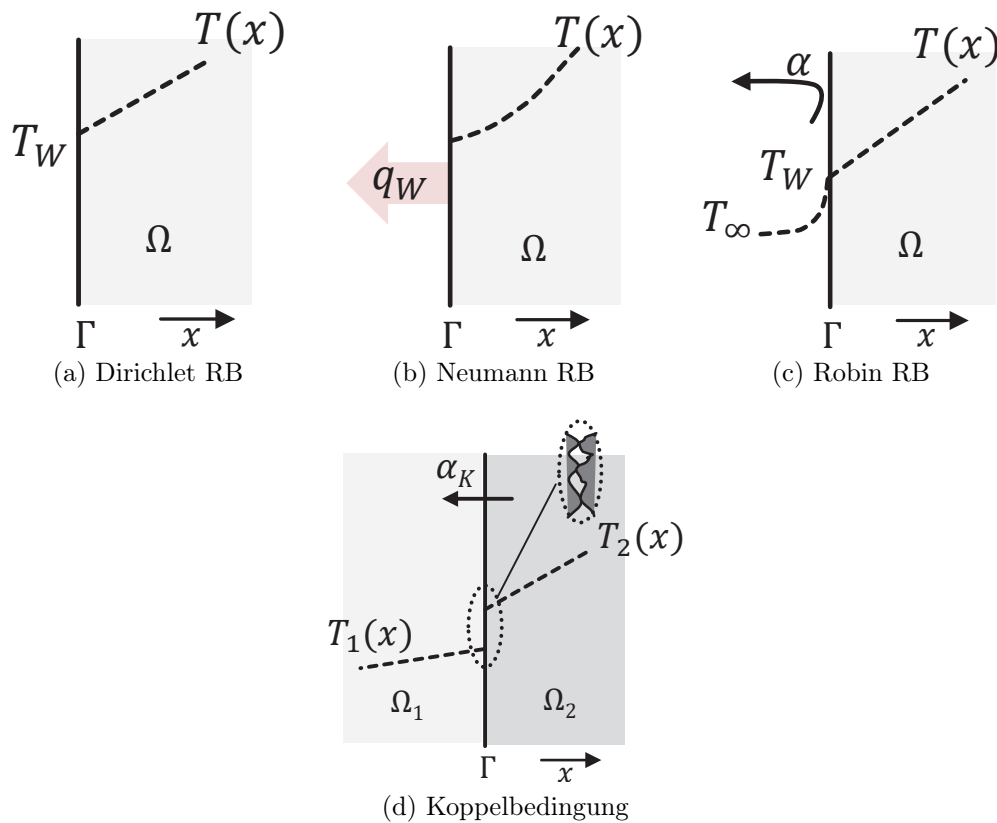


Abbildung 2.1: Randbedingungen bei eindimensionaler Wärmeleitung in x-Richtung.

Bei einem Anfangswertproblem beschreibt die Anfangsbedingung die Temperatur des Körpers  $\Omega$  zum Zeitpunkt  $t_0$ :

$$T(\mathbf{r}, t = t_0) = T_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (2.19)$$

Die folgenden Beispiele zur Erörterung der Randbedingungstypen sind aufgrund besserer Anschaulichkeit für den Fall eindimensionaler Wärmeleitung mit der Ortskoordinate  $x$  ausgeführt.

### 2.4.1 Dirichletsche Randbedingung

Bei der sogenannten Dirichletschen Randbedingung ist die Temperatur auf dem Rand des Gebiets  $\Gamma$  gegeben. Nach Abbildung 2.1a ergibt sich:

$$T(x) = T_W, \quad x \in \Gamma \quad (2.20)$$



### 2.4.2 Neumannsche Randbedingung

Die Neumannsche Randbedingung gibt das Temperaturgefälle und somit die Wärmestromdichte normal zur Oberfläche auf dem Rand des Gebiets vor, siehe auch Abbildung 2.1b.

$$-\lambda \frac{dT(x)}{dx} = q_W, \quad x \in \Gamma \quad (2.21)$$

Für den Spezialfall, dass das Gebiet adiabatisch (isoliert) ist, gilt  $q_{x,W} = 0$  und man spricht von einer homogenen Neumann-Randbedingung.

### 2.4.3 Robinsche Randbedingung

Mit der Newtonschen oder Robinschen Randbedingung wird der Wärmeübergang durch Konvektion zwischen der begrenzenden Oberfläche des Festkörpers und einem umgebenden Fluid der Temperatur  $T_\infty$  mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  beschrieben, dargestellt in 2.1c.

$$\lambda \frac{dT(x)}{dx} + \alpha T_W = \alpha T_\infty, \quad x \in \Gamma \quad (2.22)$$

Für einen unendlich großen Wärmeübergangskoeffizienten geht die Randbedingung 3. Art in eine Randbedingung 1. Art mit  $T(x) = T_\infty$  über.

### 2.4.4 Koppelbedingung

Wenn zwei Festkörper mit unterschiedlicher Wärmeleitfähigkeit an einer Grenzfläche aufeinandertreffen, gilt an dieser Fläche

$$-\lambda_1 \frac{dT_1(x)}{dx} = \alpha_K (T_1 - T_2)_i = -\lambda_2 \frac{dT_2(x)}{dx}, \quad x \in \Gamma \quad (2.23)$$

mit der Kontaktleitfähigkeit  $\alpha_K$ . Beim Kontakt zweier Grenzflächen entsteht in der Regel ein Temperaturgefälle bedingt durch die Oberflächenrauheit der Kontaktflächen, wie in Abbildung 2.1d angedeutet. Für den Fall eines idealen Kontakts, d.h.  $\alpha_K = \infty$ , gilt

$$T_1(x) = T_2(x) \quad \text{und} \quad -\lambda_1 \frac{dT_1(x)}{dx} = -\lambda_2 \frac{dT_2(x)}{dx}. \quad x \in \Gamma \quad (2.24)$$

### 2.4.5 Nichtlineare Randbedingungen

Im Fall, dass z.B. ein Wärmeübergang durch Wärmestrahlung an der Grenzfläche definiert ist, ergibt sich für die Randbedingung

$$\lambda \frac{dT(x)}{dx} + \epsilon \sigma T_W^4 = \epsilon \sigma T_\infty^4. \quad x \in \Gamma \quad (2.25)$$

Wegen der in der vierten Potenz vorkommenden Temperatur, handelt es sich hierbei um eine nichtlineare Randbedingung.

## 2.5 Analytische Ansätze

### 2.5.1 Stationäre eindimensionale Wärmeleitung, homogen

Es soll zunächst der einfachste Anwendungsfall, die stationäre Wärmeleitung ohne innere Wärmequellen betrachtet werden am Beispiel eines Wärmestroms durch eine ebene Wand der Dicke  $L$ , siehe Abbildung 2.2a. Aus der Laplace-Gleichung 2.7 folgt für den eindimensionalen Fall die DGL:  $T_{xx} = 0$ . Die zugehörigen Randbedingungen lauten  $T(0) = T_1$  und  $T(L) = T_2$ . Nach doppelter Integration wird ein linearer Temperaturverlauf ersichtlich:

$$T(x) = C_1 x + C_2. \quad (2.26)$$

Durch Verwenden der Randbedingungen ergibt sich für die Integrationskonstanten  $C_2 = T_1$  und  $C_1 = (T_2 - T_1)/L$  und somit für den Temperaturverlauf:

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}. \quad (2.27)$$

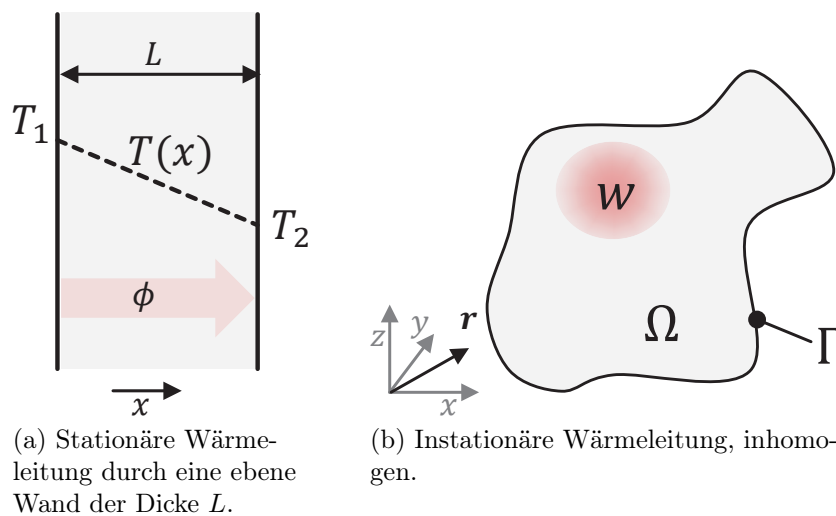


Abbildung 2.2

Mittels 2.2 folgt die Wärmestromdichte in x-Richtung

$$q = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2). \quad (2.28)$$

### 2.5.2 Instationäre Wärmeleitung, inhomogen

Im Folgenden wird der deutlich komplexere Fall der instationären Wärmeleitung durch ein inhomogenes Gebiet mit Wärmequellen betrachtet, wie in Abbildung 2.2b dargestellt. Mathematisch wird das Anfangsrandwertproblem durch Gleichung 2.4 in linearer Form beschrieben [12], [54].

Es wird zunächst die Lösung im homogenen Fall, d.h. ohne Wärmequellen bzw.  $w = 0$  berechnet

$$\rho c(\mathbf{r}) \dot{T}(\mathbf{r}, t) = \nabla(\lambda(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r}, t)) \quad (2.29)$$

Diese kann über Trennung der Variablen und eine Entwicklung der Lösung in eine Reihe von Eigenfunktionen erreicht werden. Mit Trennung der Variablen  $T(r, t) = \psi(\mathbf{r})\vartheta(t)$  kann obige Gleichung zu

$$\frac{1}{\vartheta(t)} \dot{\vartheta}(t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})} \nabla(\lambda(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})) = \beta \quad (2.30)$$

mit der sogenannten Separationskonstanten  $\beta$  umgeformt werden. Die linke Seite der Gleichung hängt nur noch von der Variable  $t$  und die rechte Seite nur noch vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  ab. Die Gleichung ist deshalb nur für den Fall gültig, dass beide Seiten konstant sind. Die Separationskonstante muss einen negativen Wert annehmen, d.h. es wird angenommen, dass  $\beta = -1/\tau$ . Wäre die Separationskonstante positiv, würde  $\vartheta(t)$  mit der Zeit ins Unendliche steigen, was den Gesetzen der Physik widersprechen würde. Damit lautet die linke Seite:

$$\frac{1}{\vartheta(t)} \dot{\vartheta}(t) = -\frac{1}{\tau}. \quad (2.31)$$

Die allgemeinen Lösung ergibt sich zu:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.32)$$

Für die rechte Seite gilt

$$\frac{1}{\rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})} \nabla(\lambda(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})) = \beta \psi(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Mit dem Differentialoperator  $\Lambda = \frac{1}{\rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})} \nabla \lambda(\mathbf{r}) \nabla$  wird die Gleichung in das Eigenwertproblem

$$\Lambda \psi(\mathbf{r}) = \beta \psi(\mathbf{r}) \quad (2.34)$$

überführt.  $\psi$  ist dabei Eigenfunktion von  $\Lambda$  zum Eigenwert  $\beta$ .

Die allgemeine Lösung von 2.2b im homogenen Fall entsteht demnach durch Superposition der Teillösungen  $\vartheta_i(t)\psi_i(\mathbf{r})$  zum Eigenwert  $\beta_i$ :

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \vartheta_0 e^{-t/\tau_i} \psi_i(\mathbf{r}). \quad (2.35)$$

Durch den Dämpfungsterm  $e^{-t/\tau_i}$  wird die Temperatur mit der Zeit gegen Null streben. Betrachtet man nun ein System mit Wärmequellen, d.h.  $w \neq 0$ , muss sich der zeitabhängige Teil von obiger Gleichung unterscheiden, d.h. die Temperatur kann auch steigen. Da sich jedes  $T$  durch eine Linearkombination von  $\psi_i(\mathbf{r})$  darstellen lässt, bilden diese eine Basis zum Funktionsraum. Die Eigenfunktionen  $\psi_i(\mathbf{r})$  werden nun derart transformiert, dass für die entsprechenden Skalarprodukte

$$\langle \psi_i(\mathbf{r}) | \psi_j(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{ij} \quad \delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (2.36)$$

gilt und sie somit eine Orthonormalbasis bilden. Durch Ersetzen des zeitabhängigen Teils in Gleichung 2.35 mit sogenannten Entwicklungskoeffizienten  $f_i(t)$  folgt

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_i f_i(t) \psi_i(\mathbf{r}). \quad (2.37)$$

Gleiches Verfahren angewandt auf den Quellterm ergibt

$$\frac{w(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})} = \sum_i m_i(t) \psi_i(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

Setzt man die letzten beiden Terme in die Ursprungs-DGL 2.4

$$\rho c(\mathbf{r}) \dot{T}(\mathbf{r}, t) - w(\mathbf{r}, t, T) = \nabla(\lambda(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r}, t)) \quad (2.39)$$

ein, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i f_i(t) \psi_i(\mathbf{r}) = \sum_i m_i(t) \psi_i(\mathbf{r}) + \Lambda \sum_i f_i(t) \psi_i(\mathbf{r}). \quad (2.40)$$

Multipliziert man die Gleichung mit  $\psi_j$  und integriert über  $\mathbf{r}$ , folgt aufgrund der Bilinearität:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \sum_i f_i(t) \psi_i(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} = \int_{\Omega} \left[ \sum_i m_i(t) \psi_i(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) + \Lambda \sum_i f_i(t) \psi_i(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}. \quad (2.41)$$

Unter Ausnutzung der Orthonormalität aus 2.36 ergibt sich für  $i = j$  ein Satz gewöhnlicher Differentialgleichung:

$$\dot{f}_i(t) = m_i(t) - \frac{1}{\tau_i} f_i(t). \quad (2.42)$$

Mittels Variation der Konstanten lauten die Koeffizienten der Reihenentwicklung:

$$f_i(t) = f_i(0) e^{-t/\tau_i} + \int_0^t e^{(\tau-t)/\tau_i} m_i(\tau) d\tau. \quad (2.43)$$

Substituiert in 2.37 ergibt sich für das Temperaturfeld:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\mathbf{r}) f_i(0) e^{-t/\tau_i} + \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\mathbf{r}) e^{(\tau-t)/\tau_i} m_i(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

## 2.6 Thermische Netzwerkelemente

Die Basis thermischer Kompaktmodelle bildet meist die Erstellung eines äquivalenten Netzwerkes mit entsprechenden Netzwerkelementen. Zwei Systeme verhalten sich analog, wenn sie durch die gleichen partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Aus diesem Grund kann man zwischen thermodynamischen und elektrischen Größen nach Tabelle 2.2 gewisse Analogien bilden, um Methoden zur Lösung elektrischer Netzwerke direkt auf thermische Netzwerke zu übertragen.

Thermische Größe		Elektrische Größe	
Thermischer Widerstand	$R_{\text{th}}$	Elektrischer Widerstand	$R$
Thermische Kapazität	$C_{\text{th}}$	Elektrische Kapazität	$C$
Temperaturdifferenz	$\Delta T$	Elektrische Spannung	$U$
Wärmestrom	$\phi$	Elektrischer Strom	$I$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda$	Elektrische Leitfähigkeit	$\rho$

Tabelle 2.2: Analogie zwischen thermodynamischen und elektrischen Größen.

### 2.6.1 Thermischer Widerstand

Der thermische Widerstand in Analogie zum elektrischen Widerstand ist im Allgemeinen durch

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{\phi} \quad \left[ \frac{K}{W} \right] \quad (2.45)$$

mit der Temperaturdifferenz  $\Delta T$  und dem Wärmestrom  $\phi$  definiert, siehe z.B. [79]. Eine im physikalischen Sinne korrekte, jedoch weniger geläufige Definition ist nach [32] durch den Temperaturabfall über einen Entropiestrom  $R_{\text{th}} = \Delta T / \dot{S}$  gegeben. Die Betrachtungsweise mittels der Primärgröße Entropie löst den Widerspruch auf, dass an einem elektrischen Widerstand immer eine Verlustleistung entsteht, dies jedoch über Definition 2.45 nicht möglich ist. Zudem kann so bewiesen werden, dass eine thermische Induktivität nicht existieren kann. Außer für die angesprochenen akademischen Fälle ist diese Definition jedoch wenig praktikabel, weshalb in folgenden Ausführungen auf die Definition nach 2.45 zurückgegriffen wird.

### 2.6.2 Thermische Kapazität

Die thermische Kapazität ist durch das Verhältnis der einem Körper zugeführten Wärme und dessen Temperaturerhöhung definiert, d.h. es gilt  $C_{\text{th}} = d\phi/dT$ . In homogenen Körpern, wie es für einzelne Komponenten idealisierend in dieser Arbeit angenommen wird, lässt sich die Wärmekapazität über die Masse des Körpers  $m$  und seiner spezifischen Wärmekapazität  $c$  berechnen:

$$C_{\text{th}} = mc \quad \left[ \frac{J}{K} \right]. \quad (2.46)$$

Bei Gasen unterscheidet man zudem zwischen der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  bzw. konstantem Volumen  $c_v$ . Ebenso lässt sich  $C_{\text{th}}$  nach dem Dulong-Petit-Gesetz durch das Produkt aus Stoffmenge und der molaren Wärmekapazität - einer universellen Konstante - berechnen [81].

## 2.7 Numerische Berechnungsverfahren

### 2.7.1 Finite-Elemente-Methode

Partielle Differentialgleichungen können analytisch nur für einfache Geometrien unter hohem mathematischen Aufwand gelöst werden. Bei der Finite-Elemente-Methode (FEM) wird das Rechenggebiet deshalb mit einem Netz, meist bestehend aus Tetra- oder Hexaedern, überzogen [49]. Diese Bausteine werden finite Elemente genannt. An den Schnittpunkten haben diese sogenannte Knoten. Es werden nun Ansatzfunktionen definiert, die das physikalische Verhalten innerhalb eines Elements beschreiben. Aus den

Ansatzfunktionen und der Integral-Formulierung der ursprünglichen partiellen DGL ergibt sich ein Gleichungssystem bestehend aus gewöhnlichen Differentialgleichungen. Handelt es sich um ein lineares Problem, kann man dieses beispielsweise mittels des Gauß-Verfahrens lösen.

Am Beispiel der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$-\rho c \dot{T}(x, t) + w + \lambda T_{xx}(x, t) = 0 \quad (2.47)$$

soll die formelle Erstellung dieser Elementmatrizen genauer erläutert werden. Die FEM basiert darauf, dass die partielle DGL zunächst von der starken in die schwache Form umgewandelt wird. Dazu wird sie im ersten Schritt mit einer willkürlich gewählten Testfunktion  $v(x)$ , auch Wichtungsfunktion genannt, multipliziert und integriert:

$$-\int_{\Omega} \rho c \dot{T}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \lambda T_{xx}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} w v(x) dx = 0 \quad (2.48)$$

Man spricht hierbei von der gewichteten Integral-Formulierung. Über partielle Integration der unbestimmten Integrale und dem gaußschen Integralsatz ergibt sich für den Term mit der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda T_{xx}(x, t) v(x) dx &= \int_{\Omega} \lambda (T_x(x, t) v(x))_x dx - \int_{\Omega} \lambda T_x(x, t) v_x(x) dx \\ &= \int_{\Gamma} \lambda T_x(x, t) v(x) dx - \int_{\Omega} \lambda T_x(x, t) v_x(x) dx \end{aligned}$$

mit  $\Gamma = \partial\Omega$ . Wenn die Testfunktion auf den Dirichlet-Rändern  $\Gamma_D$  Null wird und auf den Neumann-Rändern  $\Gamma_N$   $-\lambda T_x(x, t) = q$  gelte, folgt

$$\int_{\Gamma} \lambda T_x(x, t) v(x) dx = \int_{\Gamma_D} \lambda T_x(x, t) v(x) dx + \int_{\Gamma_N} \lambda T_x(x, t) v(x) dx = - \int_{\Gamma_N} q v(x) dx. \quad (2.49)$$

Damit ergibt sich die sogenannte schwache Integral-Formulierung der PDGL, welche die Grundlage der FEM bildet:

$$-\int_{\Omega} \rho c \dot{T}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \lambda T_x(x, t) v_x(x) dx + \int_{\Gamma_N} q v(x) dx + \int_{\Omega} w v(x) dx = 0 \quad (2.50)$$

Eine Annäherung an den räumlichen Temperaturverlauf über  $\Omega$  wird durch eine Linearkombination sogenannter Formfunktionen  $N_s(x)$  erreicht. Die Ansatzfunktion lautet dann:

$$T(x, t) = \sum_s^n T_s(t) N_s(x) \quad \text{bzw.} \quad \dot{T}(x, t) = \sum_s^n \dot{T}_s(t) N_s(x). \quad (2.51)$$

$n$  ist hierbei die Anzahl der Knoten bzw. Freiheitsgrade. Bei der sogenannten Galerkin-Methode werden die Formfunktionen sowohl zur Approximation des Temperaturverlaufs  $T(x, t)$ , als auch der Testfunktion  $v(x)$  verwendet:

$$v(x) = \sum_r^n v_r N_r(x). \quad (2.52)$$

Nach Substitution ergibt sich für die einzelnen Terme von 2.50:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \dot{T}(x, t) v(x) dx &= \int_{\Omega} \rho c \sum_{s,r}^n \dot{T}_s(t) N_s(x) v_r N_r(x) dx \\ &= \sum_{s,r}^n v_r \dot{T}_s(t) \int_{\Omega} \rho c N_s(x) N_r(x) dx \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\int_{\Omega} \lambda T_x(x, t) v_x(x) dx = \sum_{s,r}^n v_r T_s(t) \int_{\Omega} \lambda N_{s,x}(x) N_{r,x}(x) dx \quad (2.54)$$

$$\int_{\Gamma_N} q v(x) dx + \int_{\Omega} w v(x) dx = \sum_{s,r}^n v_r \left[ \int_{\Gamma_N} q N_r(x) dx + \int_{\Gamma_N} w N_r(x) dx \right] \quad (2.55)$$

Werden die Koeffizienten  $v_r$  so gewählt, dass gilt:  $v_r = \delta_{r,1}$ , folgen die Elemente der Systemmatrizen mit:

$$C_{r,s} = \int_{\Omega} \rho c N_s(x) N_r(x) dx \quad (2.56)$$

$$K_{r,s} = \int_{\Omega} \lambda N_{s,x}(x) N_{r,x}(x) dx \quad (2.57)$$

$$\phi_r = \int_{\Gamma_N} q N_r(x) dx + \int_{\Gamma_N} w N_r(x) dx \quad (2.58)$$

mit  $r, s = 1 \dots n$

Als Gleichungssystem formuliert lautet 2.50

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K} \mathbf{T} = \boldsymbol{\phi} \quad (2.59)$$

mit der globalen Wärmekapazitätsmatrix  $\mathbf{C}^{n \times n}$ , der Leitfähigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{n \times n}$ , dem Wärmequellenvektor  $\boldsymbol{\phi}^{n \times 1}$  und dem Temperaturvektor  $\mathbf{T}^{n \times 1}$ .



Zur Simulation des Wechselrichtermoduls kommt die weitverbreitete „ANSYS Workbench“ der Firma „ANSYS“ zum Einsatz, die auf der erläuterten Finite-Elemente-Methode basiert [2]. Die Software zeichnet sich u.a. dadurch aus, dass ihre Funktionalität durch Skripte erweitert werden kann. Durch Zugriff auf die Systemmatrizen 2.56 kann beispielsweise ein Skript zur Modellordnungsreduktion implementiert werden [70].

### 2.7.2 CFD

Die der CFD (kurz für Computational Fluid Dynamics) zugrundeliegenden Gleichungen sind die Navier-Stokes Gleichungen. Sie setzen sich aus den partiellen Differentialgleichungen für Massen- Impuls- und Energieerhaltung innerhalb des Fluids zusammen. Zur Vorhersage turbulenter Strömungen werden üblicherweise zeitlich gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen verwendet. Die dabei zusätzlich entstehenden Terme in Form von Reynolds-Spannungen werden mittels eines Turbulenzmodells zu einem geschlossenen Gleichungssystem ergänzt. Eine wichtige Vereinfachung bei freier Konvektion bildet die sogenannte Boussinesq-Approximation. Hierbei werden die Stoffwerte als temperaturunabhängig bei einer mittleren Grenzschichttemperatur betrachtet und die Dichte- und Druckänderung nur im Auftriebsterm berücksichtigt, siehe auch [67] oder [74].

Die Simulationssoftware „FloEFD“ der Firma „Mentor Graphics“ findet in dieser Arbeit zur Erstellung des Akkupackmodells Anwendung und ist in der Lage Wärmeübertragungsprobleme bei denen Wärmeleitung und Fluidodynamik gleichzeitig berechnet werden müssen - man spricht hier auch von konjugierter Wärmeübertragung [36] - zu lösen. Die Software zeichnet sich des Weiteren dadurch aus, dass nur ein Gleichungssatz für laminare sowie turbulente Strömungen verwendet wird. Dabei kommen die sogenannten Favre-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen mit einem  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell zum Einsatz [21]. Zur Lösung des Gleichungssystems wird die sogenannte Finite-Volumen-Methode (FVM) verwendet. Deren Grundidee besteht darin, das Rechengebiet in Kontrollvolumen aufzuteilen und die Bilanzgleichungen der Transportgrößen (z.B. der Wärmestrom) über die Zellgrenzen der Kontrollvolumen und über das gesamte Gebiet hinweg aufzustellen. Mathematisch entspricht dies einer Integralformulierung der Erhaltungsgleichungen [74]. Für die Vernetzung wird bei FloEFD der Berechnungsraum zunächst mit einem kartesischen Basisnetz mit anpassbarer Elementgröße diskretisiert. Die Vernetzungsgenauigkeit kann beispielsweise über die Wahl einer lokalen Gitterverfeinerung, wo z.B. hohe Gradienten zu erwarten sind, gesteuert werden. In einem automatisierten Verfahren wird das Rechnernetz erstellt, wobei dieses zum Hauptteil aus quaderförmigen Elementen besteht.

### 3 Thermische Kompaktmodelle

Als thermisches Kompaktmodell (engl. Thermal Compact Model oder kurz TCM) wird ein thermisches Modell mit einer geringen Anzahl an Freiheitsgraden bezeichnet, die sich in der Größenordnung von 1 bis ca. 20 Freiheitsgraden bewegen, wobei es keine in der Literatur definierte Obergrenze gibt. Ein solches TCM bietet insbesondere den Vorteil, dass bedingt durch die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems die Rechenzeit entsprechend kurz ausfällt. Dies wiederum erlaubt unter anderem die effektive Durchführung von Parameterstudien und Optimierungen, das bessere Verständnis physikalischer Wirkzusammenhänge, eine Modellimplementierung in Mikroprozessoren zur Online-Temperaturüberwachung oder die simulative Vorhersage des Temperaturverlaufs bei transienten Lastkollektiven. Die geringe Anzahl an Freiheitsgraden bringt jedoch auch Nachteile mit sich. So kann z.B. die Genauigkeit des Modells leiden, oder es lässt sich keine Aussage mehr über das Originalsystem treffen, da durch die Reduktion der Freiheitsgrade Informationen unwiderruflich verloren gehen.

Es gibt nicht nur eine Vielzahl an Kompaktmodelltypen, sondern auch eine Vielzahl von Methoden zur Erstellung dieser Kompaktmodelle. Um die in dieser Arbeit verwendeten Methoden und Modelle, hinsichtlich der Vor- und Nachteile, einordnen zu können wird in diesem Kapitel ein Überblick über die gängigsten Methoden und Entwicklungen bei der Kompaktmodellerstellung gegeben.

Dabei werden drei verschiedene Arten von Kompaktmodellen vorgestellt: Kompaktmodelle resultierend aus einer Modellordnungsreduktion, Kompaktmodelle bestehend aus konzentrierten Massen und Kompaktmodelle basierend auf thermischen Impedanzen. In Abbildung 3.1 sind die drei Modellarten sowie der Prozess zur Erstellung des jeweiligen Kompaktmodells dargestellt. In dieser Arbeit wird zwischen der Kompaktmodellierung und der Modellordnungsreduktion unterschieden. Einen Vergleich beider Prozesse findet sich in Tabelle 3.1.

Bei der Kompaktmodellierung muss die Topologie des Kompaktmodells durch den Experten intuitiv aus dem Ursprungssystem abgeleitet werden. Die Modellparameter können auf physikalische Weise direkt aus den Stoff- und Geometriedaten berechnet oder an gemessene bzw. durch detaillierte Simulationen (z.B. FEM) ermittelte Systemantworten gefittet werden.

Ausgangspunkt der Modellordnungsreduktion (kurz MOR) bildet ein hoch-dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie es z.B. aus der FEM hervorgeht. Der mathematische Vorgang der Ordnungsreduktion läuft dabei streng formell und teil- bis vollautomatisiert statt.



### 3.1 Kompaktmodelle durch MOR

Die FEM basiert auf einem hochdimensionalen Gleichungssystem, dessen Lösung einen erheblichen Rechenaufwand bedeutet, siehe Gleichung 2.59. Deswegen gibt es seit jeher die Bestrebung, FE-Modelle zu kompakten, niedrigdimensionalen Modellen zu reduzieren [9]. Man nennt diesen Prozess Modellordnungsreduktion (kurz MOR). Formal lässt er sich durch

$$\mathbf{C}_n \dot{\mathbf{T}}_n + \mathbf{K}_n \mathbf{T}_n = \boldsymbol{\phi}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{T}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{T}_r = \boldsymbol{\phi}_r \quad (3.1)$$

darstellen, wobei  $n$  die Dimension des Originalsystems und  $r$  die des reduzierten Systems bezeichnet. Die folgenden Ausführungen zum Block-Arnoldi und dem Guyan-Verfahren sind an [6] angelehnt.

#### 3.1.1 Block-Arnoldi-Verfahren

Das Block-Arnoldi-Verfahren fällt unter die Krylov-Unterraum-Methode, welches darauf basiert, das ursprüngliche System 2.59 auf einen Unterraum niedriger Dimension zu projizieren. Der Unterraum, ein sogenannter Krylov-Unterraum, werde von den beiden Orthonormalbasen  $\mathbf{U}^{[n,r]}$  und  $\mathbf{V}^{[n,r]}$  aufgespannt. Der Vektor  $\mathbf{z}$  stelle nun die Projektion des  $n$ -dimensionalen Temperaturvektors auf den  $r$ -dimensionalen Unterraum dar. Damit folgt

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{z}_r + \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.2)$$

mit dem durch die Projektion entstehenden Fehler  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Das Arnoldi-Verfahren besteht nun aus einem iterativen Algorithmus mit dem Ziel die Transformationsmatrizen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  zu bestimmen. Ist dies erreicht, kann das reduzierte System unter Vernachlässigung des Fehlers durch Einsetzen von 3.2 in 2.59 und rechtsseitige Multiplikation mit  $\mathbf{V}$  bestimmt werden.

Da die reduzierten Knoten nicht intuitiv selektiert, sondern man lediglich die Dimension  $r$  des Unterraums festlegt, ist das Verfahren automatisierbar. Das Tool „mor4ansys“ ist ein Kommandozeilentool für ANSYS, das eine MOR auf Basis von Krylov-Unterräumen mittels der Arnoldi-Methode vornimmt [70]. Dabei werden die Systemmatrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  und  $\boldsymbol{\phi}$  aus ANSYS exportiert, reduziert und in einer Datei gespeichert. Über Simulink kann man dann mit diesen reduzierten Matrizen beliebige dynamische Simulationen durchführen.

#### 3.1.2 Guyan-Verfahren

Das Guyan-Verfahren basiert ebenso auf der Projektion des Ursprungssystems auf ein niedrigdimensionales System. Im Unterschied zum Block-Arnoldi-Algorithmus muss der Anwender den Unterraum selbstständig bestimmen. Dies geschieht durch die Auswahl

wichtiger Knoten, die im ordnungsreduzierten Modell physikalisch erhalten bleiben sollen, im Folgenden als Master-Knoten (Tiefgestellter Index  $m$ ) bezeichnet. Alle anderen Knoten werden als Slave-Knoten (Tiefgestellter Index  $s$ ) bezeichnet. Im ersten Schritt werden die Systemmatrizen wie folgt blockstrukturiert:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm} & \mathbf{C}_{sm} \\ \mathbf{C}_{ms} & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_m \\ \dot{\mathbf{T}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{sm} \\ \mathbf{K}_{ms} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_m \\ \boldsymbol{\phi}_s \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Bei der sogenannten statischen Kondensation betrachtet man nur das stationäre Problem, d.h.  $\dot{\mathbf{T}} = 0$ . Mittels des Schur-Komplements ergibt sich:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_m \quad (3.4)$$

Der reduzierte Zustandsvektor  $\mathbf{T}_m$  kann dabei wie beim Arnoldi-Verfahren als Projektion von  $\mathbf{T}$  auf einen  $m$ -dimensionalen Unterraum gesehen werden. Im Unterschied zum Arnoldi-Verfahren ist dieser Schritt im statischen Fall exakt. Des Weiteren bleiben die Knoten des Ursprungssystem erhalten.

Bei der dynamischen Matrixkondensation wird die Kapazitätsmatrix auf gleiche Weise projiziert. Die reduzierte Systemgleichung lautet dann

$$\mathbf{C}_m \mathbf{T}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{T}_m = \mathbf{F}_m \quad (3.5)$$

mit  $\mathbf{K}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$  und  $\mathbf{F}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{F}$ . Im dynamischen Fall hängt die Genauigkeit des Verfahrens von der Anzahl der Master-Knoten ab.

### 3.1.3 Modale Reduktionsverfahren

Bei diesem Reduktionsverfahren wird zunächst eine Modaltransformation der Systemmatrizen durchgeführt. Nach Wahl der relevanten Eigenmoden kann das System beispielsweise mittels Marshall-Methode reduziert werden [19]. Die Herausforderung an den Anwender besteht in der Wahl der Eigenmoden.

## 3.2 Kompaktmodelle aus konzentrierten Massen

Ein thermisches Modell basierend auf konzentrierten Massen (auch Wärmequellennetz) stellt eine physikalisch anschauliche Methode dar, ein TCM zu erstellen. Bei nur einer konzentrierten Masse spricht man auch von der Methode der Blockkapazität [67]. Zur Erstellung des thermischen Netzwerkmodells wird die Geometrie in eine gewisse Anzahl von Elementen unterteilt. Hierbei kommt das Konzept der konzentrierten Massen zum Einsatz, was bedeutet, dass jedes Element eine homogene Temperatur hat und durch einen Knoten, auch als konzentrierte Masse bezeichnet, repräsentiert wird. Dieser Ansatz ist aufgrund der Homogenitätsannahme nur bei kleinen Biot-Zahlen zulässig.

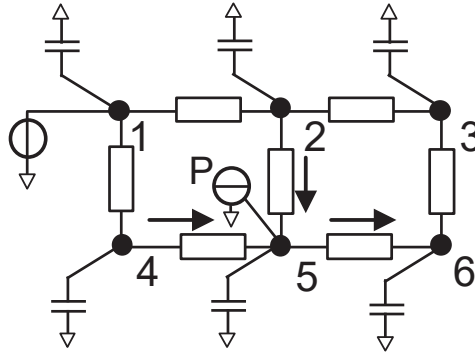


Abbildung 3.2: Einfaches Wärmequellenetz. Stromquellen entsprechen einer Verlustleistung, Spannungsquellen einer Randbedingung erster Art.

In dieser Arbeit dienen konzentrierte Massenmodelle als Referenz zur Validierung von Impedanz-basierten Kompaktmodellen. Im Folgenden soll erläutert werden, wie die Systemmatrizen der Referenzmodelle in dieser Arbeit erstellt werden.

Jedem Knoten wird eine Temperatur  $T$  und eine thermische Kapazität  $C_{th}$  zugeordnet. Einzelne Knoten werden über thermische Widerstände  $R_{th}$  gekoppelt, sodass ein ein- oder mehrdimensionales thermisches Netzwerk entsteht. In Abbildung 3.2 ist beispielhaft ein solches Netzwerk mit 6 Knoten dargestellt.

In Anlehnung an das erste Kirchhoffsche Gesetz, entspricht die Änderung der inneren Energie eines Knotens  $i$  der Summe aus zu- und abfließenden Wärmeströmen sowie einer punktförmigen Quelle  $P$ :

$$C_i \frac{dT}{dt} = \sum \phi_{i,zu} - \sum \phi_{i,ab} + P_i. \quad (3.6)$$

Für das Beispielnetzwerk 3.2 ergäbe sich z.B. am Knoten 5

$$\begin{aligned} C_5 \frac{dT_5}{dt} &= \phi_{45} + \phi_{25} - \phi_{56} + P_5 \\ &= \frac{\Delta T_{45}}{R_{45}} + \frac{\Delta T_{25}}{R_{25}} - \frac{\Delta T_{56}}{R_{56}} + P_5. \end{aligned}$$

Stellt man für jeden Knoten eine solche Gleichung auf und ordnet diese um, folgt für den allgemeinen Fall mit  $n$  Knoten ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$C\dot{T} + GT = \phi. \quad (3.7)$$

Die Komponenten des Verlustvektors  $\phi$  stellen jeweils die zum Knoten  $i$  gehörigen Wärmequellen  $P_i$  dar. Die Diagonalmatrix  $\mathbf{C}$  setzt sich aus den Kapazitäten der Knoten zusammen,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & C_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Die Wärmeleitwertmatrix  $\mathbf{G}$  beinhaltet die thermischen Widerstände zwischen den einzelnen Knoten

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{-1} & -R_{1,2}^{-1} & -R_{1,j}^{-1} & \cdots & -R_{1,n}^{-1} \\ -R_{2,1}^{-1} & R_{2,2}^{-1} & -R_{2,j}^{-1} & \cdots & -R_{2,n}^{-1} \\ -R_{i,1}^{-1} & -R_{i,2}^{-1} & R_{i,j}^{-1} & \cdots & -R_{i,n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{n,1}^{-1} & -R_{n,2}^{-1} & -R_{n,3}^{-1} & \cdots & R_{n,n}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Jeder Eintrag ist dabei gleich dem negativen Kehrwert des thermischen Widerstands zwischen zwei Knoten. Sind zwei Knoten nicht miteinander verbunden ist der Widerstand zwischen diesen unendlich groß, wodurch der Kehrwert, also der jeweilige Eintrag in der Matrix Null wird. Des Weiteren ist die Wärmeleitwertmatrix symmetrisch, d.h. es gilt:

$$R_{i,j}^{-1} = R_{j,i}^{-1}. \quad (3.10)$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen stellen aufgrund der Energieerhaltung die negative Summe aus den Widerständen der i-ten Zeile dar:

$$R_{i,i}^{-1} = - \left( \sum_{j=1}^{i-1} R_{i,j}^{-1} + \sum_{j=i+1}^n R_{i,j}^{-1} \right). \quad (3.11)$$

Ist eine Dirichlet-RB  $T_D$  am Knoten  $i$  gegeben, muss die i-te Zeile des Gleichungssystems neu formuliert werden, so dass diese

$$T_i = T_D \quad (3.12)$$

lautet. Dazu müssen folgende Modifikationen vorgenommen werden:

$$K_{i,i} = 1, \quad K_{i,j \neq i} = 0 \quad \text{und} \quad P_i = T_D. \quad (3.13)$$

Für eine durch den Wärmestrom  $\phi_N$  gegebene Neumann-RB am Knoten  $i$  wird lediglich der entsprechende Eintrag von  $\phi$  geändert

$$P_i = \phi_N. \quad (3.14)$$

Eine Robin-RB muss über die Erweiterung des Netzwerkmodells um einen Umgebungsknoten mit zugehörigem konvektivem Widerstand erfolgen.

Die Lösung des resultierenden Systems gewöhnlicher DGL hat die gleiche Struktur wie das aus der FEM hervorgehende. In dieser Arbeit wird das System in MATLAB erstellt und mittels eines programmeigenen „Solvers“ für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme gelöst.

Mehrdimensionale Kompaktmodelle basierend auf konzentrierten Massen sind besonders dann geeignet, wenn das betrachtete System aus diskreten Bauteilen bzw. Komponenten aufgebaut ist, die jeweils durch eine konzentrierte Masse repräsentiert werden können. Ein Kühlkörper lässt sich als thermischer Widerstand durch eine ebene Wand interpretieren. Mit 2.5.1 in 2.45 eingesetzt folgt für einen Kühlkörper der Dicke  $L$  und Querschnittsfläche  $A$ :  $R_{th,KK} = L/(\lambda A)$ . Robin-Randbedingungen werden dann nach 2.8 entsprechend mit  $R_{th,KF} = 1/(\alpha A)$  berücksichtigt. Ein Netzwerk kann sukzessive aus Widerständen mit entsprechenden thermischen Kapazitäten aufgebaut werden. Diese auf physikalischen Parametern basierenden Modelle finden in den unterschiedlichsten Domänen Anwendung, z.B. zur Modellierung elektrischer Maschinen [51], elektrischer Bauelementen [23] oder ganzer Elektroniken [43], [38].

Im Rahmen der europäischen Projekte „SEED“ und „DELPHI“ wurden einheitliche Topologien thermischer Kompaktmodelle für verschiedene Gehäusearten erstellt [44]. Dazu wurde ein Satz von Randbedingungen definiert, unter welchen Messungen oder Simulationen durchgeführt werden [14], [47]. Die Modellparameter werden anschließend an die Messergebnisse gefittet, mit der Einschränkung, dass diese über alle Randbedingungen konstant bleiben. Diese Modelle werden daher als randbedingungsunabhängig bezeichnet, unter der Voraussetzung, dass die Randbedingungen nicht von den ursprünglich definierten abweichen (engl.: boundary condition independent, BCI) [29], [53], [52].

### 3.3 Kompaktmodelle auf Impedanzen basierend

Ein weiterer Typus von Kompaktmodellen, zwischen denen in dieser Arbeit unterschieden wird, stellen Kompaktmodelle basierend auf thermischen Impedanzen dar, deren Grundlagen und Eigenschaften im Folgenden detaillierter betrachtet werden sollen.

#### 3.3.1 Thermische Impedanz

Die thermische Impedanz  $Z_{th}$  ist keine Impedanz im klassischen Sinn, d.h. keine komplexwertige Funktion der Frequenz, sondern vielmehr ein transienter Wärmewiderstand.



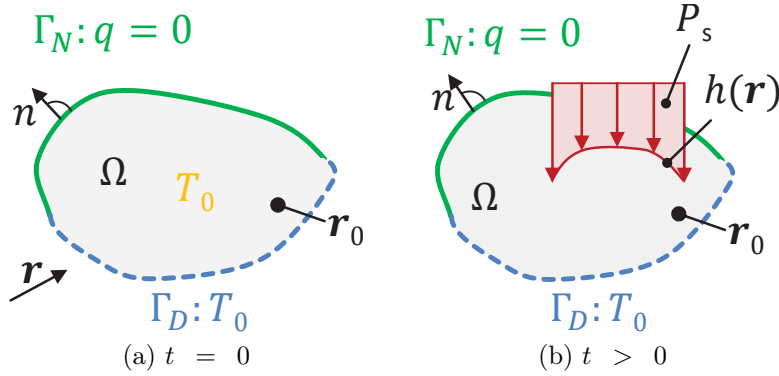


Abbildung 3.3: Gebiet mit Leistungssprung zur Erstellung des  $Z_{th}$  unter stationären Randbedingungen bei Umgebungs- und Anfangstemperatur  $T_0$ .

Sie wird aus der transienten Temperaturantwort  $T(\mathbf{r}, t)$  eines linearen Systems der Form 2.4 gebildet. Dabei habe die Verlustleistungsdichte die separierte Form

$$w(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r})\Theta(t) \quad \text{mit} \quad P_s = \int_{\Omega} h(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.15)$$

und stellt somit einen Leistungssprung der Höhe  $P_s$  dar. Für die thermische Impedanz ergibt sich dann:

$$Z_{th}(\mathbf{r}, t) = \frac{T(\mathbf{r}, t) - T_0}{P_s} = \frac{\Delta T(\mathbf{r}, t)}{P_s} \quad \left[ \frac{K}{W} \right] \quad (3.16)$$

$T_0$  ist eine beliebig wählbare, konstante Bezugstemperatur, z.B. die der Umgebung. Abbildung 3.3 zeigt die Rand- und Anfangsbedingungen, für die der  $Z_{th}$  im Allgemeinen definiert ist. Wie im linken Bild 3.3a zu erkennen, muss zum Anfangszeitpunkt ein homogenes Temperaturfeld der Höhe  $T_0$  vorliegen. Ebenso muss die Umgebungstemperatur bei  $T_0$  sein. Für alle nachfolgenden Zeitpunkte, siehe Bild 3.3b, darf sich die Umgebungstemperatur nicht ändern. Des Weiteren muss die Wärmestromdichteverteilung zeitunabhängig sein. Man kann dies nach 2.18 auch mit  $B(\mathbf{r}, 0) = 0$  und  $\dot{B}(\mathbf{r}, t) = 0$  (hieraus folgt zwingenderweise auch  $B(\mathbf{r}, t) = 0$ ) ausdrücken. Die Annahme der Linearität fordert, dass sowohl Materialparameter, als auch der Wärmequellenterm nicht von der Temperatur abhängen dürfen.

Für Standardbauelemente (MOSFETs, IGBTs, Dioden oder Kühlkörper) beinhalten die jeweiligen Datenblätter Informationen über die Impedanzen zwischen Sperrschicht und Umgebung, Sperrschicht und Gehäuse oder Gehäuse und Umgebung. Die Darstellungsform besteht dann entweder aus einer zeitlich logarithmisch skalierten  $Z_{th}(t)$ -Kurve oder aus RC-Paaren eines Foster- oder Cauer-Netzes.

Empirisch kann eine  $Z_{th}$ -Kurve auf verschiedene Weisen ermittelt werden. Wird die Impedanz eines Leistungshalbleiters gesucht, bietet es sich an, die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands der Sperrschicht auszunutzen. Man spricht hier auch vom temperatursensitiven Parameter (engl. Temperature Sensitive Parameter, TSP) [78],

[45]. Im Falle von Silizium besteht zwischen Spannung und Temperatur ein annähernd linearer Zusammenhang von ca.  $2,3 \frac{\text{mV}}{\text{K}}$ . Die Schwierigkeit besteht darin, den TSP möglichst ohne Rauschen und mit der nötigen Abtastrate zu messen und gleichzeitig den Chip zu heizen. Eine standardisierte Methode ist beispielsweise mittels des transienten thermischen Messgeräts „T3ster“ möglich [64]. Mit weniger Aufwand verbunden ist die Erstellung der  $Z_{\text{th}}$ -Kurven über Abkühlkurven, da hier das gleichzeitige Heizen entfällt [87].

Eine Methodik sich den gemessenen  $Z_{\text{th}}$  zu Nutze zu machen ist die sogenannte Netzwerkkidentifikation durch Entfaltung (engl. Network Identification by Deconvolution, NID) [69]. So ist es möglich, z.B. Rückschlüsse auf den thermischen Schichtaufbau eines Leistungshalbleiters parallel zur Richtung des Wärmestroms zu ziehen und die thermischen Parameter der einzelnen Schichten zu identifizieren.

Die thermischen Impedanzen in dieser Arbeit werden ausschließlich aus Simulationsmodellen (FEM-Modelle oder konzentrierte Massenmodelle) durch simulierte Sprungantworten erstellt und liegen in normierter Form als diskrete Zeit-Impedanz-Wertepaare vor. Fällt die Impedanz örtlich gesehen mit der Wärmequelle zusammen, spricht man von einer sogenannten Selbstimpedanz (engl. Self-Thermal-Impedance) [55]. Liegt die Impedanz örtlich außerhalb der Wärmequelle wird diese als Koppelimpedanz (engl. Mutual-Impedance) bezeichnet.

Ist die thermische Impedanz eines Systems bekannt, lässt sich damit auf elegante Weise die Temperaturantwort ebendieses Systems auf einen beliebigen kontinuierlichen Leistungsverlauf zu berechnen:

$$\Delta T(\mathbf{r}, t) = \int_0^t P(\tau) \dot{Z}_{\text{th}}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (3.17)$$

Dieses sogenannte Faltungsintegral soll in folgendem Abschnitt hergeleitet werden.

### 3.3.2 Herleitung - Von der thermischen Impedanz zum Temperaturverlauf

Das eingangs erwähnte lineare System 2.4 habe folgende Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} T(\mathbf{r}, t) = T_0, & \mathbf{r} \in \Gamma_D \\ \nabla T_n(\mathbf{r}, t) = 0, & \mathbf{r} \in \Gamma_N \\ T(\mathbf{r}, 0) = T_0, & \mathbf{r} \in \Omega \end{cases} \quad (3.18)$$

Für das weitere Vorgehen wird der Temperaturverlauf an nur einer Stelle  $\mathbf{r}_0$  statt des gesamten Gebiets ausgewertet. Außerdem soll  $T_0 = 0$  gelten. Letztere Annahme ist zulässig, da  $T(\mathbf{r}, t) + T_0$  ebenfalls eine Lösung von 2.4 darstellt.

Aufgrund der Linearität gilt das Superpositionsprinzip, bestehend aus Additivität und Homogenität. Bei den folgenden Herleitungen werden unterschiedliche Ausprägungen

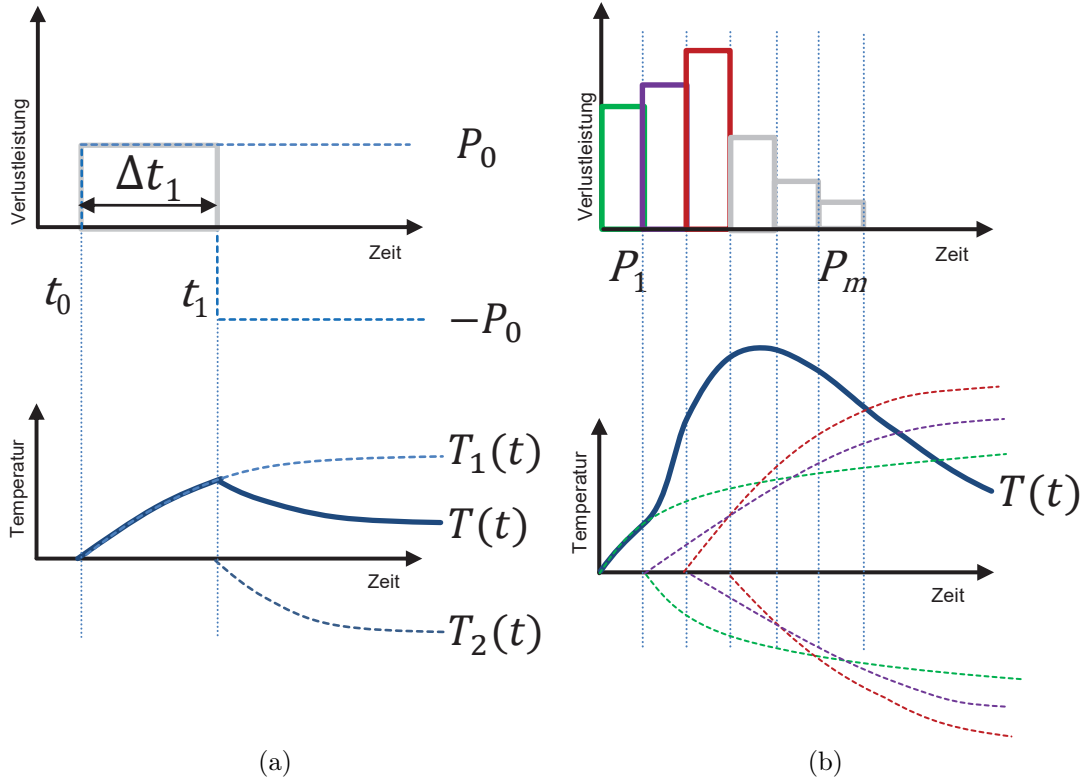


Abbildung 3.4: Überlagerung von Sprungantworten zur Erstellung des Temperaturverlaufs für ein beliebiges Lastprofil.

dieser Eigenschaft ausgenutzt. Wenn  $T_1(t)$  und  $T_2(t)$  Lösungen von 2.4 mit den Inhomogenitäten  $w_1(\mathbf{r}, t)$  und  $w_2(\mathbf{r}, t)$  und den aufgeführten Rand- und Anfangsbedingungen sind, dann ist auch die Linearkombination  $k_1 T_1(t) + k_2 T_2(t)$  eine Lösung mit der Inhomogenität  $k_1 w_1(\mathbf{r}, t) + k_2 w_2(\mathbf{r}, t)$  unter gleichen Rand- und Anfangsbedingungen.

Zunächst wird die Temperatur für einen rechteckförmigen Puls der Höhe  $P_0$  berechnet. Diesen kann man sich als Überlagerung zweier Sprünge gleichen Betrags vorstellen, siehe Abbildung 3.4a.

Der erste Sprung starte zum Zeitpunkt  $t_0$ , d.h.  $w(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r})\Theta(t - t_0)$ , und habe nach der Definition des  $Z_{\text{th}}$  in 3.16 die unendlich lange Temperaturantwort  $T_1(t) = P_0 Z_{\text{th}}(t - t_0)$ . Der zweite Sprung an der Stelle  $t_1$  ist nun negativ, d.h.  $w(\mathbf{r}, t) = -w(\mathbf{r})\Theta(t - t_1)$ , und habe die unendlich lange Temperaturantwort  $T_2(t) = -P_0 Z_{\text{th}}(t - t_1)$ .

Aus der Linearität der Wärmeleitungsgleichung folgt wie eingangs beschrieben, dass die Temperaturantwort auf den Rechteckpuls  $w(r, t) = w(\mathbf{r})\Theta(t - t_0) - w(\mathbf{r})\Theta(t - t_1)$

$$T(t) = P_0 (Z_{\text{th}}(t - t_0) - Z_{\text{th}}(t - t_1)) \quad (3.19)$$

ergibt. Um ein beliebiges Eingangssignal darzustellen, können nun Lösungen für weitere Rechteckpulse überlagert werden. Der Temperaturverlauf für  $m$  Rechteckpulse der jeweiligen Höhe  $P_i$

$$T(t) = \sum_{i=1}^m P_i (Z_{\text{th}}(t - t_{i0}) - Z_{\text{th}}(t - t_{i1})) \quad (3.20)$$

ist in Abbildung 3.4b dargestellt.

Handelt es sich nun um einen kontinuierlichen Lastverlauf  $P(t) = \int w(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int h(\mathbf{r}) \Theta(t) d\mathbf{r}$  entwickelt man zunächst die Funktion  $Z_{\text{th}}(t - t_{i0})$  mittels Taylorreihe an der Stelle  $(t - t_{i1})$ . Mit der Definition des Zeitschritts  $\Delta t_i = t_{i1} - t_{i0}$  folgt

$$Z_{\text{th}}(t - t_{i0}) = Z_{\text{th}}(t - t_{i1}) + \dot{Z}_{\text{th}}(t - t_{i1}) \Delta t_i + R(\Delta t_i^2). \quad (3.21)$$

Eingesetzt in 3.20 ergibt sich

$$T(t) = \sum_{i=1}^m P_i \left( \dot{Z}_{\text{th}}(t - t_{i1}) \Delta t_i + R(\Delta t_i^2) \right). \quad (3.22)$$

Wird  $\Delta t_i$  infinitesimal klein, folgt

$$\sum_{i=1}^m \Rightarrow \int_0^t, \quad P_i \Rightarrow P(t_i), \quad \Delta t_i \Rightarrow dt_i, \quad \text{und} \quad R(\Delta t_i^2) \Rightarrow 0.$$

Substituiert man  $t_i$  durch  $\tau$  ergibt sich der Temperaturverlauf für einen kontinuierlichen Lastverlauf zu

$$T(t) = \int_0^t P(\tau) \dot{Z}_{\text{th}}(t - \tau) d\tau. \quad (3.23)$$

Die spezielle Anforderung an die Form des Quellterms  $w(\mathbf{r}, t)$  resultiert direkt aus der Herleitung, da sich bei der Superposition von Sprungfunktionen zwar die Höhe zeitlich ändern kann, jedoch aber nicht die räumliche Verteilung der Verlustleistung. Anders ausgedrückt, können damit ausschließlich Temperaturverläufe berechnet werden, wenn sich die Verteilung der Verlustleistung über das Berechnungsgebiet nicht mit der Zeit ändert.

Wird die Temperatur nicht nur an der Stelle  $\mathbf{r}_0$  sondern im gesamten Gebiet berechnet und zudem für  $T_0 \neq 0$  und  $\Delta T(t) = T(t) - T_0$  eingesetzt folgt die zu beweisende Gleichung 3.17. Mittels des Faltungsoperators  $*$  und  $T_0 = 0$  kann man diese auch wie folgt formulieren:

$$T(\mathbf{r}, t) = P(t) * \dot{Z}_{\text{th}}(\mathbf{r}, t). \quad (3.24)$$

Aufgrund der Kommutativität der Faltungsoperation lässt sich die Temperaturantwort auch über

$$T(\mathbf{r}, t) = Z_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) * \dot{P}(t) \quad (3.25)$$

berechnen. Die Gültigkeit des Beweises zeigt sich auch über alternative Herleitungen, z.B. mittels des Duhamel-Theorems oder Substitution von  $w(\mathbf{r}, t)$  durch  $w(\mathbf{r})\Theta(t)$  in 2.4 und anschließender Ableitung [30]. Ebenso ergeben sich bei beiden Beweisen die gleichen Einschränkungen der Rand- und Anfangsbedingungen, die bei der in dieser Arbeit gezeigten Herleitung die Voraussetzung bildet.

Eine mittlere Temperatur über der Fläche bzw. Volumen  $V$  kann über eine mittlere thermische Impedanz  $Z_{\text{th,av}}(t)$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} T_{\text{av}}(t) &= \frac{1}{V} \int_V T(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \frac{1}{V} \int_V Z_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) * \dot{P}(t) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{V} \int_V Z_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} * \dot{P}(t) = Z_{\text{th,av}}(t) * \dot{P}(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Es soll nun ein System mit mehreren zeitlich voneinander unabhängigen  $n$  Wärmequellen betrachtet werden. Um Gleichung 3.25 anwenden zu können, muss die Inhomogenität die Form  $w_j(\mathbf{r}, t) = \sum_i^n a_i(t)w_i(\mathbf{r})$  aufweisen. Die Verlustleistung der  $j$ -ten Wärmequelle lautet dann  $P_j(t) = a_j(t) \int w_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ . Nach dem Superpositionsprinzip können nun die Lösungen für jedes  $j$  überlagert werden, woraus folgt:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^n Z_{\text{th},j}(\mathbf{r}, t) * \dot{P}_j(t). \quad (3.27)$$

Für eine endliche Anzahl an  $m$  Monitorpunkten und  $n$  unabhängigen Wärmequellen ergibt sich:

$$\mathbf{T}(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Z_{\text{th},ij}(t) * \dot{P}_j(t). \quad (3.28)$$

Diese Summenformel kann in eine Matrixdarstellung überführt werden:

$$\begin{bmatrix} T_1(t) \\ \vdots \\ T_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\text{th},11}(t) & Z_{\text{th},12}(t) & \dots & Z_{\text{th},1n}(t) \\ Z_{\text{th},21}(t) & Z_{\text{th},22}(t) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{\text{th},m1}(t) & Z_{\text{th},m2}(t) & \dots & Z_{\text{th},mn}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{P}_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

In Kurzschreibweise folgt

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{Z}(t) * \dot{\mathbf{p}}(t). \quad (3.30)$$

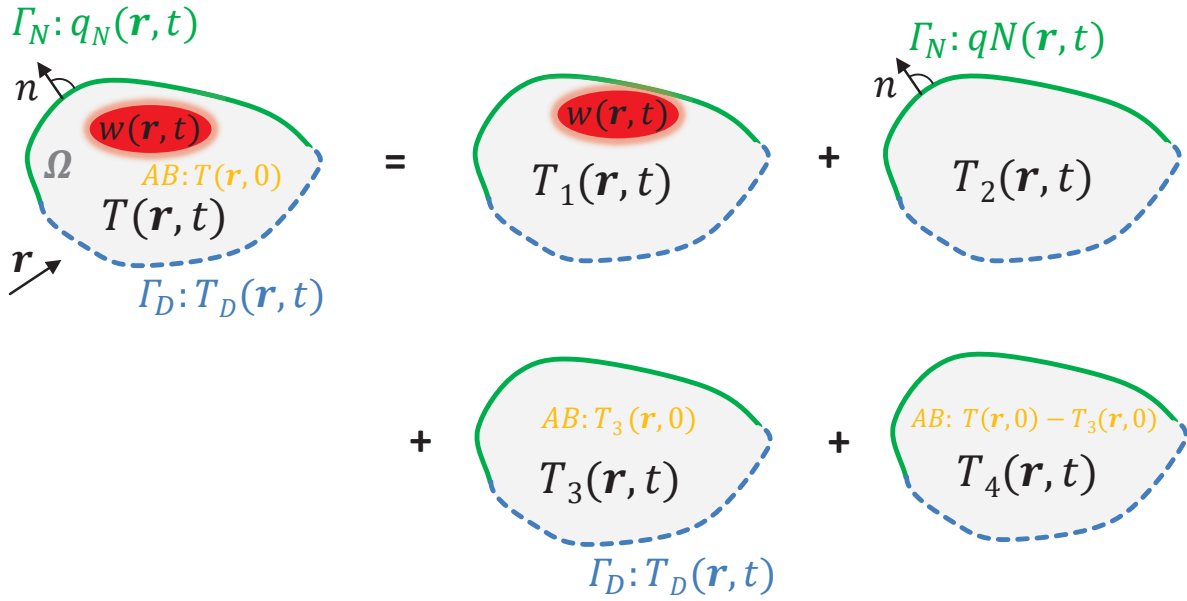


Abbildung 3.5: Zerlegung des komplexen Problems mit allgemeinen Randbedingungen in Teilprobleme.

Üblicherweise sind die Selbstimpedanzen auf der Diagonalen und die Koppelimpedanzen außerhalb der Diagonalen angeordnet. Des Weiteren ist  $\mathbf{Z}$  bei linearen Systemen symmetrisch. Jedoch muss nicht unbedingt gelten, dass  $\mathbf{Z}$  quadratisch ist, beispielsweise kann die Anzahl der Monitorpunkte größer als die Anzahl der Wärmequellen sein.

Im folgenden Abschnitt soll nun eine Lösung des Temperaturfelds für allgemeine Randbedingungen aufgezeigt werden [30]. Die Lösung für das Problem mit allgemeinen Randbedingungen wird durch Überlagerung der Lösungen für die einzelnen Ränder und Inhomogenität gebildet. Abbildung 3.5 zeigt ein Gebiet mit zeitabhängigen Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen, anhand dessen das Vorgehen erläutert wird. Die für die meisten thermischen Analysen wichtigen Robin-Randbedingungen werden hier nicht explizit behandelt, jedoch verhalten sich diese analog zur Dirichlet-Randbedingung, wie in Abschnitt 2.4 erörtert.

Das Temperaturfeld  $T_1(\mathbf{r}, t)$ , siehe Bild 3.5, stellt dabei die Lösung für die Inhomogenität und Null-Rand- und Anfangsbedingungen dar, wie es im vorherigen Kapitel gezeigt wurde. Alle anderen Teilprobleme  $T_2$ ,  $T_3$  und  $T_4$  sind homogen, d.h. sie bilden die Lösung ohne Wärmequellterm.

Das Temperaturfeld  $T_2(\mathbf{r}, t)$  ist die Lösung mit der zeitabhängigen Neumann-Randbedingung in Form einer Oberflächen-Wärmestromdichte  $q_N(\mathbf{r}, t)$  und Null-Anfangsbedingung. Die Berechnung des Temperaturfelds erfolgt nun analog zu Gleichung 3.25, unter der Voraussetzung, dass  $q_N(\mathbf{r}, t) = \Theta(t)q_N(\mathbf{r})$  gilt. Mit  $\phi_N(t) = \int q_N(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}$  folgt

$$T_2(\mathbf{r}, t) = Z_{\text{th},N}(\mathbf{r}, t) * \dot{\phi}_N(t), \quad (3.31)$$

wobei man  $Z_{\text{th},N}$  als thermische Impedanz für eine Neumann-Randbedingungen interpretieren kann.

Das Temperaturfeld  $T_3(\mathbf{r}, t)$  ist die Lösung bei einer zeitabhängigen Dirichlet-Randbedingung, für die gelten muss  $T_D(\mathbf{r}, t) = a(t)T_D(\mathbf{r})$  und der Anfangsbedingung  $T_3$ . Die Anfangsbedingung  $T_3(\mathbf{r}, 0)$  kann dabei beliebig mit einer einzigen Einschränkung gewählt werden, nämlich, dass diese die Randbedingung auf dem Rand erfüllt, d.h.  $T_3(\mathbf{r}, 0) = T_D(\mathbf{r}, 0)$ ,  $\mathbf{r} \in \Gamma_D$ . Um nun  $T_3(\mathbf{r}, t)$  zu erhalten, wird zunächst statt eines kontinuierlichen Temperaturverlaufs ein Temperatursprung  $\Theta(t)T_D(\mathbf{r})$  am Rand bei Null-Anfangsbedingungen vorgegeben.  $T_s(t, \mathbf{r})$  sei die zugehörige Lösung bzw. Sprungantwort für eben diese Randbedingung:

$$T_s(\mathbf{r}, t) = \Theta(t)T_D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_D. \quad (3.32)$$

$\dot{T}_s(t, \mathbf{r})$  sei des Weiteren die Lösung bzw. Impulsantwort für:

$$\dot{T}_s(\mathbf{r}, t) = \delta(t)T_D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_D. \quad (3.33)$$

Den kontinuierlichen Temperaturverlauf auf dem Rand  $T_D(\mathbf{r}, t) = a(t)T_D(\mathbf{r})$  kann man als Überlagerung von zeitlich verschobenen Impulsen sehen, was auch unter der Ausblendeigenschaften des Diracstoßes bekannt ist, d.h. es gilt:

$$T_D(\mathbf{r}, t) = a(t)T_D(\mathbf{r}) = \int a(\tau)T_D(\mathbf{r})\delta(t - \tau)d\tau. \quad (3.34)$$

$T_3(\mathbf{r}, t)$  ergibt sich nun aus der Überlagerung der einzelnen Impulsantworten

$$T_3(\mathbf{r}, t) = \int_0^t a(\tau)\dot{T}_s(\mathbf{r}, t - \tau)d\tau, \quad (3.35)$$

bzw. in eine zu 3.25 äquivalente Form gebracht

$$T_3(\mathbf{r}, t) = a(t) * \dot{T}_s(\mathbf{r}, t). \quad (3.36)$$

Die Lösung des Teilproblems bei einer transienten Dirichlet-Randbedingung wird also analog zur Lösung bei transientser Inhomogenität gebildet.  $T_s(\mathbf{r}, t)$  lässt sich ebenso als thermische Impedanz der Dirichlet-Randbedingung  $Z_{th,D}$  interpretieren, sodass gilt:

$$T_3(\mathbf{r}, t) = Z_{th,D} * \dot{a}(t). \quad (3.37)$$

Das Temperaturfeld  $T_4(\mathbf{r}, t)$  ist die Lösung, die zur Erfüllung der Anfangsbedingung  $T(\mathbf{r}, 0)$  der zusammengesetzten Lösung notwendig ist. Es wird bei Null-Randbedingungen und der Anfangsbedingung  $T_4(\mathbf{r}, 0) = T(\mathbf{r}, 0) - T_3(\mathbf{r}, 0)$  gebildet.

Das Temperaturfeld ergibt sich schließlich durch Addition der Teillösungen:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^4 T_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.38)$$

Die Matrixdarstellung aus Gleichung 3.30 kann mit den allgemeinen Rand - und Anfangsbedingungen in eine verallgemeinerte Matrixdarstellung überführt werden:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{Z}_{\text{th}}(t) * \dot{\mathbf{s}}(t). \quad (3.39)$$

Der allgemeine Quellenvektor  $\mathbf{s}(t)$  setzt sich aus den volumetrischen Wärmequellen  $P_i(t)$ , den Oberflächen-Wärmeströmen aus den Neumann-Randbedingungen  $\phi_i(t)$ , den Temperaturen der Dirichlet-Randbedingungen  $T_i(t)$  und der homogenen Anfangstemperatur  $T(0) - T_0$  zusammen.

### 3.3.3 Thermisch äquivalente Netzwerke

Ziel des folgenden Abschnitts ist es, ein zur thermischen Impedanz äquivalentes thermisches Netzwerk unter Verwendung thermischer Netzwerkelemente abzuleiten. Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass das Temperaturfeld 3.25 ebenso über ein diskretes Spektrum von Zeitkonstanten beschrieben werden kann [31]. Gleichung 2.44 löst das Temperaturfeld bei nicht näher spezifizierter Inhomogenität. Ist diese von der Form 3.15 kann man Gleichung 2.38 analog zu Schritt 2.41 umformulieren:

$$m_i(t) = \int_{\Omega} \frac{w(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})} \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = g(t) \int_{\Omega} \frac{h(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})} \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = g(t) k_i \quad (3.40)$$

Wenn  $g(t)$  als  $P(t)$  identifiziert wird, ergibt sich durch Einsetzen in 2.37:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\mathbf{r}) f_i(0) e^{-t/\tau_i} + \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\mathbf{r}) k_i e^{(\tau-t)/\tau_i} d\tau \quad (3.41)$$

Die Summe im Integral kann man als zeitliche Ableitung der thermischen Impedanz interpretieren:

$$\dot{Z}_{\text{th}}(\mathbf{r}, t - \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\mathbf{r}) k_i e^{\frac{\tau-t}{\tau_i}}. \quad (3.42)$$

Nach Integration und der Substitution  $R_i(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) k_i \tau_i$  ergibt sich

$$Z_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(\mathbf{r}) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right). \quad (3.43)$$

Hiermit wurde gezeigt, dass geometrisch endliche Systeme mit Null-Rand- und Anfangsbedingungen ein diskretes Eigenwertspektrum aufweisen. Es gibt daher theoretisch unendlich viele Netzwerke die äquivalent zu dieser Darstellung sind [87]. In der Praxis haben sich jedoch mit den sogenannten Foster- und Cauer-Netzen zwei eindimensionale Topologien durchgesetzt, die mit ihren spezifischen Vor- und Nachteilen im Folgenden genauer erläutert werden sollen [3], [6], [73].



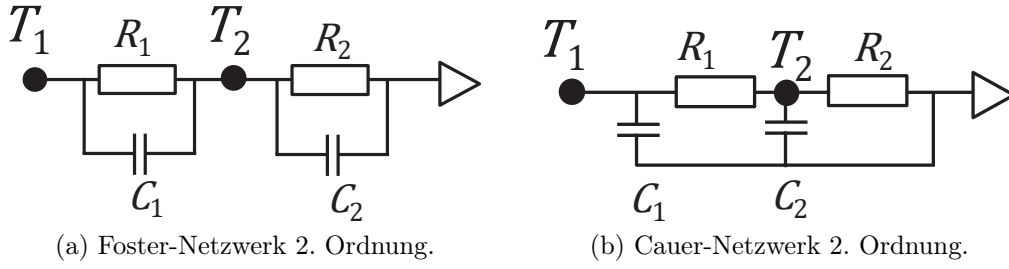


Abbildung 3.6: Zweistufige RC-Netzwerktopologien als äquivalente thermische Netzwerke bei Null-Rand- und Anfangsbedingungen.

### 3.3.3.1 Foster-Netz

Das Foster-Netz ist nach dem gleichnamigen Mathematiker R. M. Foster benannt und wurde im Zuge seines Reaktanz-Theorems 1924 vorgestellt [22]. In der Elektrotechnik entspricht ein Foster-Netz einer seriellen Schaltung von Tiefpassfiltern erster Ordnung. Abbildung 3.6a zeigt exemplarisch ein Foster-Netz zweiter Ordnung, d.h. mit zwei Gliedern, aus thermischen Netzwerkelementen. Zur Herleitung von  $T_1$  werden die Differentialgleichungen an den Knoten 1 und 2 bei Leistungseinprägung eines Einheitssprungs  $P_s(t)$  an Knoten 1 aufgestellt:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= P_s(t)R_1 - C_1 R_1 (\dot{T}_1(t) - \dot{T}_2(t)) + T_2(t) \\ T_2(t) &= P_s(t)R_2 - C_2 R_2 \dot{T}_2(t). \end{aligned}$$

Die Lösung lautet für Null-Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= P_s(t)R_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}\right) + T_2(t) \\ T_2(t) &= P_s(t)R_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\right). \end{aligned}$$

Mit  $\tau_i = R_i C_i$  gilt für ein Foster-Netz n-ter-Ordnung:

$$T_1(t) = P_s(t) \sum_{i=1}^n R_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right). \quad (3.44)$$

Mit der Definition der thermischen Impedanz kann man analog schreiben:

$$Z_{th}(t) = \sum_{i=1}^n R_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right). \quad (3.45)$$

Die thermische Impedanz  $Z_{th}(r, t)$  aus Gleichung 3.43 weist folglich die gleiche Struktur wie ein Foster-Netz mit unendlich vielen RC-Gliedern bzw. Eigenwerten auf. Die

unendliche Summe kann dabei durch eine endliche approximiert werden. Es zeigt sich hierbei auch, dass auch negative Werte für  $R$  und  $C$  in Kombination auftreten können, solange die Eigenwerte bzw. Zeitkonstanten positiv bleiben.

### 3.3.3.2 Cauer-Netz

Alternativ zum Foster-Netz lässt sich ein RC-Netzwerk auch über ein sogenanntes Cauer-Netz beschreiben. Die nach dem Begründer der linearen Netzwerksynthese W. Cauer benannte Netzwerktopologie ist im Falle eines Cauer-Netzes 2.Ordnung in Abbildung 3.6b dargestellt. Diese wird auch als 1.Cauer-Form oder Kettenbruchschaltung bezeichnet.  $\Delta T_j(t)$  ist im Vergleich zum Foster-Netz deutlich aufwändiger zu berechnen, wie die analytische Lösung für das gezeigte Netzwerk eindrücklich zeigt [73]:

$$Z_1(t) = [R'_1 (1 - e^{-\omega_1 t}) + R'_2 (1 - e^{-\omega_2 t})] \quad (3.46)$$

mit  $\tau_1 = C_1 R_1$ ,  $\tau_2 = C_2 R_2$ ,  $\tau_{12} = C_1 R_2$  und

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{\tau_1 \tau_2} \left[ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4\tau_1 \tau_2}{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})^2}} \right] \\ R'_1 &= \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} [R_1 \tau_2 \omega_1 - R_1 - R_2] \\ R'_2 &= \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} [-R_1 \tau_2 \omega_2 + R_1 + R_2]. \end{aligned}$$

### 3.3.3.3 Äquivalenzumformung

Zwischen Foster- und Cauer-Netzwerken ist eine eindeutige Transformation möglich [46]. Im Folgenden soll die, für spätere Ausführungen relevante, Transformation eines Foster-Netzes in ein Cauer-Netz gezeigt werden. Dazu stellt man zunächst das Foster-Netz aus Gleichung 3.45 als sogenannte Partialbruchschaltung im Frequenzbereich dar:

$$Z_1(s) = Z_2(s) + Z_3(s) + \dots + Z_n(s) = \sum_{i=2}^n \frac{R_i}{1 + s\tau_i}. \quad (3.47)$$

Durch Summation der einzelnen Elemente ergibt sich der Quotient

$$Z(s) = \frac{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots + n_{N-1} s^{N-1}}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_N s^N} \quad (3.48)$$

mit reellen Koeffizienten  $n_i$  und  $d_i$ . Nun werden iterativ die einzelnen Cauer-Parameter abgeleitet. Für  $s \rightarrow \infty$  ergibt sich für die erste Kapazität des Cauer-Netzes  $C_1$  folgender Zusammenhang:

$$Y(s \rightarrow \infty) = \frac{1}{Z(s \rightarrow \infty)} \approx \frac{d_N}{n_{N-1}} s = C_1 s. \quad (3.49)$$

Die Admittanz  $Y(s \rightarrow \infty)$  zieht man nun von der ursprünglichen Admittanz  $Y(s)$  ab:

$$Y'(s) = 1/Z(s) - C_1 s = \frac{d'_0 + d'_1 s + d'_2 s^2 + \dots + d'_{N-1} s^{N-1}}{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots + n_{N-1} s^{N-1}}. \quad (3.50)$$

Aus der zugehörigen Impedanz kann nun mit  $s \rightarrow \infty$  ein Reihenwiderstand extrahiert werden:

$$Z'(s) \approx \frac{n_{N-1}}{d_{N-1}} = R_1. \quad (3.51)$$

$R_1$  wird nun von  $Z'(s)$  abgezogen wodurch sich  $Z''(s)$  ergibt. Nun werden die Schritte ausgehend von Gleichung 3.49 iterativ wiederholt bis  $Z = 0$  erreicht ist.

Die Transformation eines Foster-Netzes in ein Cauer-Netz führt zu einer eindeutig definierten Kombination von Widerständen und Kapazitäten, d.h. für jeden  $R_{th}$  und  $C_{th}$  folgt zum einen ein eindeutiger Wert und zum anderen eine bestimmte Reihenfolge. Dies gilt nicht, wenn umgekehrt ein Cauer-Netz in ein Foster-Netz überführt wird, da jede beliebige Anordnung der RC-Elemente zum mathematisch gleichen Ausdruck führt [28].

### 3.3.3.4 Eigenschaften von Foster- und Cauer-Netzen

Zwischen Foster- und Cauer-Netz besteht offensichtlich eine äußere Äquivalenz, was bedeutet, dass die Lösung für zeitunabhängige Probleme identisch ist [73]. Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_{th,F} = \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{th,C} = R_{th,1} + R_{th,2}. \quad (3.52)$$

Um nun die Unterschiede bei zeitabhängigen Problemen zu verdeutlichen, werden zwei äquivalente Netzwerke nach der in Abschnitt 3.3.3.3 beschriebenen Äquivalenzumformung anhand eines Netzwerks 2. Ordnung erstellt, wie es in Bild 3.7a zu sehen ist. Beide Netzwerke haben, wie erwartet, die identische Impedanz, siehe Bild 3.7b.

Der Unterschied besteht nun darin, dass das Foster-Netz als Blackbox zu interpretieren ist, bei der nur die Potentialdifferenz zwischen Eingangsknoten und Umgebung eine physikalische Bedeutung hat. Alle anderen Knoten haben keine physikalische Entsprechung. Abbildung 3.7c zeigt die Wärmeströme  $\phi_{2f}$  und  $\phi_{2c}$  durch  $R_{th,2}$  im Vergleich. Der Wärmestrom  $\phi_{2c}$  hat zu Beginn eine Steigung von Null, die mit der Zeit zunimmt, wohingegen  $\phi_{2f}$  sofort eine Steigung größer als Null aufweist. Dies bedeutet, dass ein Teil der am Eingang eingepprägten Leistung ohne zeitliche Verzögerung den Endknoten erreicht, was nicht der im physikalischen Sinne korrekten, diffusiven Ausbreitung der Temperatur entspricht. Den gleichen sprunghaften Anstieg des Wärmestroms  $\phi_{2f}$  sieht man in Abbildung 3.7d im Falle eines Temperatursprungs am Eingang. Der entscheidende Vorteil des Foster-Netzes besteht in seiner bereits gezeigten kompakten mathematischen Beschreibung der Impedanz.

Mittels des Cauer-Netzes ist es hingegen möglich den Wärmestrom durch einen Pfad physikalisch korrekt zu beschreiben. Im Vergleich zum Foster-Netz haben alle Knoten

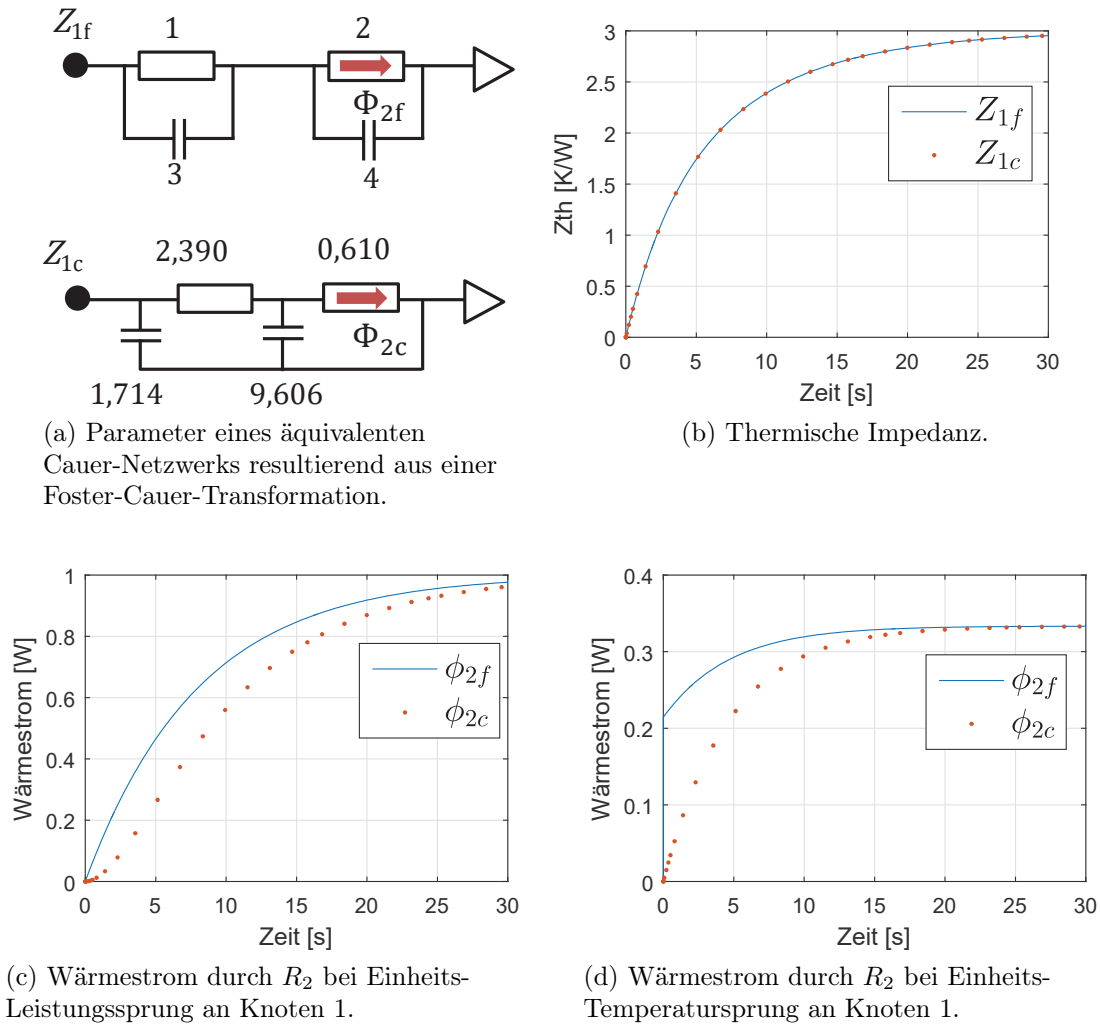


Abbildung 3.7: Vergleich zwischen zwei äquivalenten Foster- und Cauer-Netzen resultierend aus einer Foster-Cauer-Transformation anhand der Driving-Point-Impedanz und der Wärmeströme durch  $R_2$ .

im Cauer-Netz eine physikalische Entsprechung, weshalb sie deutlich anschaulicher sind. So kann man ähnlich zum konzentrierten Massenmodell aus Abschnitt 3.2 einen Wärmepfad, beispielsweise eines Halbleiters, aus thermischen Netzwerkelementen modellieren. Bei einem Cauer-Netz 2.Ordnung könnte man einen Knoten der Sperrschicht, den zweiten dem Kühlkörper und den dritten der Umgebung zuordnen. Kontaktwiderstände, Materialeigenschaften und Geometrie würden die Basis für thermische Widerstände und Kapazitäten bilden. Man kann das Cauer-Netz auch als grobe Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung verstehen.

Betrachtet man das Cauer-Netz aus Abbildung 3.6b würde die Impedanz in Knoten 2 bei Applikation eines Leistungssprungs an Knoten 1 der Koppelimpedanz  $Z_{12}$  entsprechen. Hierbei wird offensichtlich, dass der Wärmestrom, wie im letzten Abschnitt erläutert, den Knoten 2 verzögert erreicht. Aus diesem Grund ist es nicht möglich eine Koppel-

impedanz exakt durch ein klassisches Foster-Netzwerk zu repräsentieren [1], [42]. Ein thermisch äquivalentes Netzwerk einer Koppelimpedanz muss also diese Verzögerung des Wärmestroms aufweisen, weshalb man entweder auf ein Cauer-Netz zurückgreifen kann oder negative RC-Glieder einführen kann, wobei die Zeitkonstante stets positiv bleiben muss.

### 3.3.4 Programmtechnische Umsetzung

In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt, dass es mittels von Kompaktmodellen, basierend auf thermischen Impedanzen möglich ist, ein Temperaturfeld auf beliebige Eingangssignale zu berechnen. Das folgende Kapitel hat zum Ziel ein Computer-Programm zu erstellen, mit dem es möglich ist, zunächst ein Kompaktmodell zu erzeugen, um damit Rechenoperationen, unter anderem die Berechnung des Temperaturfeldes nach Gleichung 3.39 durchzuführen. Dazu bietet sich ein objektorientierter Ansatz an, bei dem spezifische Objekte, beispielsweise ein thermische Kompaktmodell für ein Invertermodul, unter der allgemeinen Klasse „TCM“ zusammengefasst werden. Des Weiteren verfügt die Klasse „TCM“ über Methoden, wie z.B. eine Rechenoperation zur Erstellung des Temperaturfeldes. Eine Zusammenfassung aller Methoden findet sich in Tabelle A.1 im Anhang. Das Programm zur Erstellung, Kopplung und Anwendung thermischer Kompaktmodelle wurde in der Software „Matlab“ realisiert.

#### 3.3.4.1 Zeitdiskrete Faltung

Wie in Abschnitt 3.3.1 diskutiert, liegen die Impedanzen und Lasten in den meisten Anwendungsfällen zunächst als Vektoren von Werte-Zeit-Paaren vor, womit der direkte Weg zur Berechnung des Temperaturverlaufs die zeitdiskrete Faltung ist. Wenn  $Z_{th}$  und  $\dot{P}$  Funktionen mit diskretem Definitionsbereich sind, gilt:

$$T(k) = Z_{th}(j) * \dot{P}(k) = \sum_{j=1} Z_{th}(j) \dot{P}(k - j + 1) \quad (3.53)$$

mit den Vektoren  $Z_{th}^{[m]}$  und  $\dot{P}^{[n]}$ . In Matlab führt die Funktion  $T = conv(Z_{th}, \dot{P})$  die diskrete Faltung aus. Die Summation wird so lange durchgeführt, solange die Bedingungen  $j \leq m$  und  $k - j + 1 \leq n$  erfüllt sind. Die Verschiebung um „+1“ kommt daher, dass in Matlab das erste Element mit 1 und nicht mit 0 bezeichnet wird. Für die ersten drei Glieder ergibt sich nach 3.53:

$$\begin{aligned} T(1) &= Z_{th}(1) \dot{P}(1) \\ T(2) &= Z_{th}(1) \dot{P}(2) + Z_{th}(2) \dot{P}(1) \\ T(3) &= Z_{th}(1) \dot{P}(3) + Z_{th}(2) \dot{P}(2) + Z_{th}(3) \dot{P}(1). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Hieraus ergeben sich zwei Anforderungen an die an der Faltung beteiligten Vektoren  $Z_{th}$  und  $\dot{P}$ . Erstens muss gelten, dass die Zeitschritte der Vektoren übereinstimmen und

zweitens müssen die Zeitschritte äquidistant sein. Das Faltungsprodukt  $T$  hat demnach den identischen Zeitschritt mit der Länge  $\min(m, n)$ . Ist eine längere Systemantwort gefordert, muss die fehlende Information des Faktors extrapoliert werden. In der aktuellen Programmversion wird der Impedanzvektor linear extrapoliert, basierend auf der Steigung an den Kurvenenden.

Die Impedanz wird meist logarithmisch dargestellt, um alle Zeitkonstanten abzubilden. Es ergibt sich daraus der Vorteil, dass der Impedanzvektor deutlich kleiner als bei einer entsprechend genauen linearen Zeitskala ist. Um die gleiche Genauigkeit der linearen Skala zu erreichen, müssten die Zeitschritte der linearen Skala der kleinsten vorkommenden Zeitkonstante entsprechen.

### 3.3.4.2 Kubische Interpolation

Ist die Zeitskala der Impedanz logarithmisch, muss diese für die Faltung zunächst auf eine lineare Skala interpoliert werden. Hierbei stellt die kubische Interpolation eine genaue Interpolationsmethode dar [76], [75]. Um dies zu veranschaulichen, wird zunächst eine Referenz-Impedanz  $Z_{th,ref}(t)$  mittels Foster-Netz 6. Ordnung aus den Parametern  $R_i: [0,1 \ 2 \ 5 \ 1 \ 13 \ 10]$  und  $C_i: [0,005 \ 0,08 \ 0,3 \ 1 \ 5 \ 10]$  betrachtet. In Abbildung 3.8a ist  $Z_{th,ref}(t_{i,log})$  mit

$$t_{i,log} = \log_{10}(t_{i,lin}) \quad \text{für} \quad 0,001s \leq t \leq 1000s$$

dargestellt. Danach werden Punkte zwischen den Referenzpunkten auf einer linearen Zeitskala mit einem Zeitschritt von 0,001 s interpoliert. Bei einer linearen Interpolation liegt die relative Abweichung bei maximal 0,5 %. Bei der kubischen Interpolation beträgt die Abweichung in diesem Beispiel weniger als 0,02 %. Es zeigt sich also, dass die kubische Interpolation eine deutlich höhere Genauigkeit bei logarithmisch verteilten  $Z_{th}$ -Kurven liefert, weswegen auf diese in den Methoden der Klasse „TCM“ standardmäßig zurückgegriffen wird.

### 3.3.4.3 Programmablaufpläne der Methoden „SimTemp“ und „FosterFit“

Innerhalb der Methode „SimTemp“ wird der Temperaturverlauf mittels Faltung aus den  $Z_{th}$ -Kurven berechnet, siehe Abbildung 3.9a. Eingabeparameter sind ein Objekt der Klasse TCM (Obj), der Verlustleistungsvektor mit zugehörigen Zeitschritten (PIn, ZeitPIn), die Referenztemperatur (Tamb) und der gewünschte Ausgabezeitvektor (ZeitOut). Der Verlustvektor wird linear und die Impedanzen kubisch auf den Ausgabezeitvektor interpoliert. Die zeitdiskrete Faltung der interpolierten  $Z_{th}$ -Kurven mit dem zeitlich abgeleiteten Verlustvektor findet innerhalb der Funktion „CellConv“ statt.

Mit der Methode „FosterFit“ werden Foster-Netze an  $Z_{th}$ -Kurven gefittet, siehe Abbildung 3.9b. Eingabeparameter sind ein Objekt der Klasse TCM (Obj), die gewünschte Ordnung des Foster-Netzes der Selbst-Impedanzen (AnzSelbst) und der Koppelimpedanzen (AnzKoppel) sowie die Position der Selbstimpedanzen in der Eingangs-Impedanzmatrix (PosSelbst). Mittels eines nicht-linearen Solvers, werden im ersten

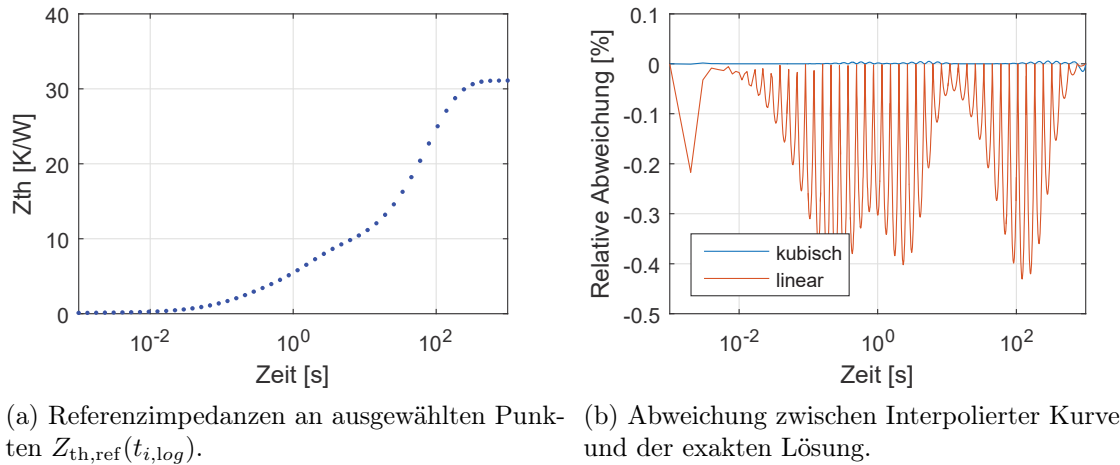


Abbildung 3.8: Vergleich zwischen linearer und kubischer Interpolation.

Programmteil alle  $i$  Selbstimpedanzen und im zweiten Programmteil alle  $j$  Koppelimpedanzen an entsprechende Foster-Netze durch Minimieren der Abweichung zwischen der analytischen Lösung und den Eingangsimpedanzen gefittet. Die Parameter des Foster-Netzes werden dabei so lange angepasst, bis die Ist-Abweichung (Fehler) unter der gewünschten Soll-Abweichung ( $Fehler_{max}$ ) liegt.

### 3.3.5 Anwendung thermischer Kompaktmodelle

Kompaktmodelle basierend auf thermischen Impedanzen finden dort Anwendung, wo es in erster Linie auf eine genaue, aber dennoch höchst recheneffiziente Vorhersage des transienten Temperaturverlaufs an ausgewählten kritischen Stellen ankommt.

So finden sich die meisten Kompaktmodelle im Bereich der Leistungselektronik zur Simulation der Sperrschichttemperatur. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um die Impedanz eines einzelnen Bauteils in Bezug auf eine Referenztemperatur (z.B. Umgebungstemperatur oder Kühlkörpertemperatur). Abbildung 1.4 zeigt beispielsweise die Impedanz eines Leistungs-MOSFETs in einem sogenannten TO220-Gehäuse für verschiedene Tastverhältnisse. Bei dieser Art der Modellbildung wird von einem eindimensionalen Wärmestrom von der Quelle zur Senke ausgegangen [61].

Mit der vorgestellten Methode der Koppelimpedanzen, siehe Gleichung 3.30, lassen sich jedoch auch weitaus komplexere Kompaktmodelle aufbauen, wie dies beispielsweise bei Leistungshalbleiter-Modulen notwendig ist. In einem solchen Modell sind z.B. mehrere Leistungshalbleiter wie IGBTs und Dioden auf ein DCB-Substrat (engl. Direct Copper Bonded) gelötet, das wiederum auf einer Grundplatte befestigt ist. Zusätzlich zur Eigenerwärmung der Halbleiter muss in solchen Modulen die thermische Kopplung über Substrat und Grundplatte zwischen den dissipierenden Bauelementen berücksichtigt werden [39], [55], [19].

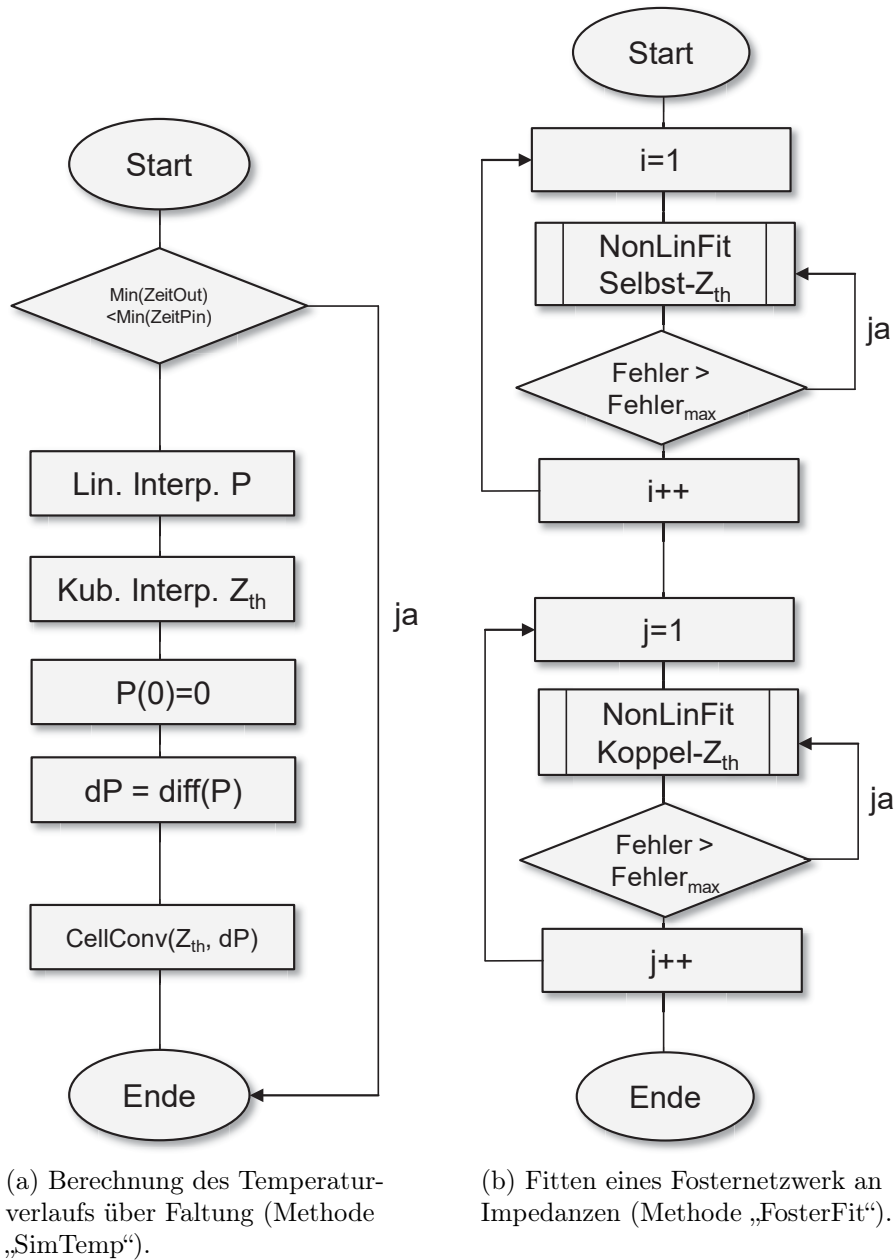


Abbildung 3.9: Programmablaufpläne ausgewählter Methoden der Klasse „TCM“.

Bezüglich der Methodik, wie die Temperaturen schlussendlich simuliert werden, gibt es zahlreiche Ansätze.

Der Ansatz, das thermische Verhalten über ein äquivalentes Netzwerk anzufitten, bietet die Möglichkeit, die Kompaktmodelle in einen elektrischen Schaltungssimulator wie z.B. „Spice“ oder „PLECS“ zu übertragen [65], [5], [17]. Vorteilhaft ist dabei, dass sich eine thermo-elektrische Simulation über eine spannungsgesteuerte Stromquelle realisieren lässt. Nachteilig erweist sich, dass die RC-Netzwerke schnell an die Grenzen der grafischen Darstellbarkeit stoßen und deswegen wiederum reduziert werden müssen [16].



Im Falle, dass Koppelimpedanzen relevant sind und mitberücksichtigt werden müssen, führt das Fitten eines Foster-Netzes aus bereits erwähnten Gründen zu Abweichungen. Deswegen werden in [40] die Koppelimpedanzen durch Cauer-Netzes repräsentiert und mit Foster-Netzen für die Selbstimpedanzen verschaltet.

Kompaktmodelle sind zudem hervorragend geeignet, die kritischen Temperaturen in Echtzeit zu simulieren. Dazu werden die Modelle in den Microcontroller implementiert. Als effizient erweist es sich beispielsweise, RC-Glieder mit großer Zeitkonstante in Subroutinen mit entsprechend großem Zeitschritt auszulagern [62].

Bei komplexeren Modellen ist die bereits vorgestellte Methode über Faltung und zeitdiskrete Impedanzen im Vorteil. Zum einen ist diese deutlich übersichtlicher als ein äquivalentes Netzwerk im Schaltungssimulator und zum anderen entsteht keine Abweichung durch Fitten eines Netzwerks an die Originalkurve [76]. Aus diesen Gründen wird im nächsten Kapitel die Kompaktmodellierung auf Basis von zeitdiskreten Impedanzen auf einen Akkupack, der ein komplexes System darstellt, angewandt und bewertet.

## 4 Kompaktmodell eines Akkupacks

Im folgenden Abschnitt wird ein echtzeitfähiges thermisches Kompaktmodell des in Abbildung 4.1 gezeigten Akkupacks, bestehend aus Lithium-Ionen-Rundzellen, für ein Elektrowerkzeug erstellt. Das Modell basiert auf den in Kapitel 3.3 beschriebenen Ansätzen zur Berechnung des Temperaturverlaufs mittels thermischer Impedanzen.

Insbesondere bei Lithium-Ionen-Batterien ist die genaue Kenntnis der Zelltemperaturen notwendig, da sie ihren optimalen Betriebspunkt lediglich im recht engen Temperaturbereich von 20°C - 40°C haben [86]. Außerhalb dieses Temperaturfensters treten Effekte auf, die zur Verringerung der Lebensdauer, geringerem Wirkungsgrad oder gar zum Sicherheitsrisiko werden können.

Verluste in den Batteriezellen, den Zellverbindern und Zuleitungen führen beim Laden und Entladen zur Erwärmung des Akkupacks. Die Alterung der Zellen, die mit einem Kapazitätsverlust einhergeht, wird durch Temperaturen über 40°C beschleunigt. Treten innerhalb des Batteriepacks Temperaturgradienten auf, altern die Zellen unterschiedlich schnell. Man spricht hier von Debalancierung. Da die Zelle mit der geringsten Kapazität die Entladeschlussspannung und somit Kapazität des gesamten Packs bestimmt, gilt es, diesem Effekt durch eine gleichmäßig gute thermische Anbindung jeder Zelle entgegenzuwirken. Temperaturen deutlich über 50°C sollten vermieden werden, da es zur Zersetzung des Elektrolyten einhergehend mit einer Entflammung kommen kann.

Unterhalb von 20°C steigt der Innenwiderstand der Zellen aufgrund höherer Viskosität des Elektrolyten und langsamerer chemischer Prozesse an, wodurch die Verlustleistung



Abbildung 4.1: Akkupack für ein Elektrowerkzeug mit einer Nennspannung von 18 V und einer Nennkapazität von 4 Ah [68].

zu- und der Wirkungsgrad abnimmt. Bei tiefen Temperaturen ( $\leq -20^\circ\text{C}$ ) kann beim Laden sogenanntes Lithium-Plating auftreten, wobei sich metallisches Lithium in den Zellen ablagert und eine damit einhergehende Dendritenbildung zur Zerstörung des Akkupacks führen kann.

Die Notwendigkeit eines genauen thermischen Modells wird dadurch gesteigert, dass Akkupacks für den Profi-Handwerker eine hohe Lebensdauer bei möglichst hohen Lade- und Entladeströmen aufweisen müssen. Besonders bei hohen Entladeströmen, die bei Elektrowerkzeugen, wie z.B. einem Winkelschleifer, kurzzeitig im Bereich von 100-200A liegen können, ist die Kenntnis der Akkutemperatur notwendig, um das Werkzeug bei Überschreiten der spezifizierten Maximaltemperatur abregeln zu können.

Aus den genannten Gründen ist es wichtig, die Zelltemperaturen sowohl bei der Entwicklung neuer Akkupacks, als auch aktiv im Betrieb durch geeignete Modelle zu simulieren. Ein Kompaktmodell, wie es im Folgenden erstellt wird, bietet u.a. den Vorteil, dass es aufgrund der Recheneffizienz, mit einem elektrischen Modell des Batteriepacks oder des gesamten Antriebstrangs des Elektrowerkzeugs gekoppelt werden kann.

Der untersuchte Akkupack besteht aus 18650-Lithium-Ionen-Zellen, d.h. Rundzellen mit 18 mm Durchmesser und 650 mm Länge. Jede Rundzelle hat eine Nennspannung von 3,6 V und eine Kapazität von 2 Ah. Davon sind jeweils fünf in Serie geschaltet und auf zwei elektrisch parallel verbundene Lagen aufgeteilt, wodurch sich eine Gesamt-Nennspannung von 18 V und eine Gesamtkapazität von 4 Ah ergibt. Die Zellen sind über Abstandshalter in ein Kunststoffgehäuse eingepresst und durch angeschweißte Zellverbinder elektrisch verbunden.

## 4.1 Stand der Technik

Thermische Netzwerkmodelle für Batteriepacks basierend auf konzentrierten Massenmodellen haben den Nachteil, dass sie für eine ausreichende Genauigkeit aus einer hohen Anzahl von Elementen bestehen müssen und somit komplex werden. Dies ist u.a. der thermischen Kopplung zwischen den einzelnen Batteriezellen sowie der anisotropen Stoffeigenschaften innerhalb der Zellen geschuldet. Wird die Batteriezelle durch nur einen Knoten repräsentiert [24], können die Wärmeströme innerhalb des Zellverbunds nicht exakt nachgebildet werden.

Kompaktmodelle basierend auf thermischen Impedanzen versprechen hingegen eine genaue und im Vergleich zu CFD rechenzeiteffiziente Möglichkeit Batteriepacks zu simulieren. In [37] wurde dies anhand eines Kompaktmodells basierend auf Foster-Netzen für einen Batteriepack für Hybrid- oder Elektrofahrzeuge gezeigt.

Im folgenden Abschnitt wird ein erweitertes, auf thermischen Impedanzen basierendes Kompaktmodell, vorgestellt. Es wird ein neuartiger Linearisierungsansatz entwickelt, um aus einem nichtlinearen Strömungsmodell ein Kompaktmodell abzuleiten. Zudem ist mit dem Kompaktmodell möglich variierende Umgebungstemperaturen zu berücksichtigen. Das thermische Modell wird schließlich mit einem elektrischen Batteriemodell gekoppelt, um ein komplexes Lastkollektiv zu simulieren.

Ziel ist u.a. die simulative Vorhersage der Temperaturgradienten im Akkupack, um Auswirkungen des eingangs erwähnten Debalancierungseffekts im Voraus abschätzen zu können. Im Folgenden wird zunächst ein thermo-elektrisches Zellmodell erstellt und validiert. Dieses Zellmodell bildet die Basis für das CFD-Akkupackmodell. Mittels Linearisierung wird anschließend das Kompaktmodell abgeleitet. Im letzten Schritt wird ein Foster-Netzwerk an die jeweiligen Sprungantworten gefittet, welches mit dem elektrischen Modell gekoppelt wird.

## 4.2 Zellmodell

### 4.2.1 Thermisches Zellmodell

Im folgenden Abschnitt wird ein thermisches Modell einer einzelnen 18650-Zelle erstellt. Dazu wird in dieser Arbeit ein empirischer Ansatz verfolgt, d.h. es werden zunächst Referenzmessungen unter definierten Umgebungsbedingungen durchgeführt. Mittels einer CFD-Simulation bei gleichen Rand- und Anfangsbedingungen werden die unbekannten thermischen Parameter der Zelle identifiziert.

In einer Lithium-Ionen-Rundzelle strömen Lithium-Ionen zwischen Kathode und Anode durch einen nicht-wässrigen Elektrolyten. Ein zwischen den Elektroden befindlicher Separator schützt diese vor direktem Kontakt. Die Schichten, bestehend aus Zuleitung, Kathode, Separator, Anode und Zuleitung, werden zu einer zylindrischen Zelle gewickelt und in ein Edelstahlgehäuse eingeschlossen. Abbildung 4.2 zeigt den schematischen Aufbau einer solchen Zelle. Da die für die thermischen Eigenschaften maßgeblichen Größen, wie z.B. Anpressdruck zwischen den Schichten oder Elektrolytzusammensetzung hohen Toleranzen unterliegen, werden in dieser Arbeit die einzelnen Schichten nicht im Detail modelliert. Stattdessen wird die gesamte Zelle als homogener Körper vereinfacht. Die Autoren in [11] bestätigen, dass die Annahme eines homogenen anisotropen Materials

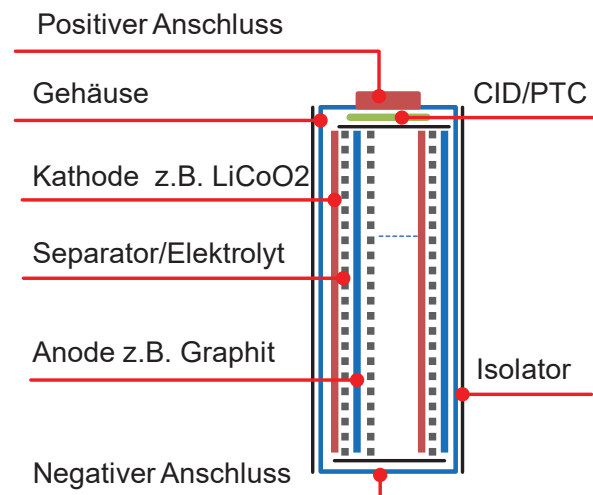


Abbildung 4.2: Schematischer Aufbau einer Lithium-Ionen-Rundzelle.

für das Innere der Zelle sowohl zur thermischen Modellierung einer einzelnen Zelle, als auch im Zellverbund ein zulässiger Ansatz ist.

Bedingt durch den beschriebenen Aufbau, zeichnet sich die Wicklung durch eine starke Anisotropie in der Wärmeleitfähigkeit aus. Die im Vergleich zum Elektrodenmaterial geringe Wärmeleitfähigkeit des Elektrolyten führt zu einem deutlich höheren thermischen Widerstand in radialer Richtung innerhalb der Wicklung. Die gesamte Zelle betrachtend wird jedoch der axiale Widerstand zusätzlich durch weitere Bauelemente erhöht: So befinden sich zwischen Wickel und positivem Anschluss Sicherheitsvorrichtungen wie z.B. ein sogenanntes CID (engl. für Current Interrupt Device) oder ein PTC-Schalter (engl. für Pressure, Temperature, Current), die bei kritischem Druck oder Temperatur die Verbindung zur Kathode trennen.

Dass sich der innere Aufbau der Zellen, z.B. durch die Art der Sicherheitsmechanismen, Menge des Elektrolyten, Abstände oder die Art der Kontaktierung von Hersteller zu Hersteller unterscheiden und je nach Messmethodik gewisse Toleranzen auftreten, spiegelt sich in der Spannweite der ermittelten thermophysikalischen Eigenschaften verschiedener Publikationen wieder. Die spezifische Wärmekapazität  $c$  reicht hierbei von  $700 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$  bis  $1.700 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ , die axiale Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{ax}}$  von  $3 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  bis  $30 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  und die radiale Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{rad}}$  von  $0,2 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  bis  $0,6 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  [80], [20], [15], [60].

Da  $c$  mit ca.  $800 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$  vom Zellhersteller spezifiziert wurde, wird dieser Parameter fest gehalten. Das Gewicht der vorliegenden Zellen beträgt 44,4 g, womit sich eine Dichte  $\rho$  von  $2.684 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ergibt. Somit verbleiben die zu identifizierende Materialparameter  $\lambda_{\text{ax}}$  und  $\lambda_{\text{rad}}$ .

Für die Referenzmessungen werden verschiedene Zellen gleichen Typs im Ofen solange erwärmt, bis sich in ihnen eine homogene Temperaturverteilung von  $80^\circ\text{C}$  einstellt, um sie anschließend bei Umgebungstemperatur auf einer Halterung abkühlen zu lassen. Der Versuch bietet den Vorteil, dass zunächst kein Modell zur Ermittlung der Verlustleistung in der Zelle benötigt wird. Die Messstellen befinden sich am Plus- und Minuspol,  $T_{\text{ax,p}}$  und  $T_{\text{ax,m}}$ , sowie auf der radialen Mantelfläche  $T_{\text{rad}}$ , siehe Abbildung 4.3a. Die Messreihen A.1 zeigen, dass  $T_{\text{ax,p}}$  am schnellsten abkühlt, was auf eine geringfügige Asymmetrie in axialer Richtung schließen lässt. Dieser Effekt lässt sich durch die schlechtere thermische Anbindung des Pluspols an den Wickel durch die vorhandenen Sicherheitsmechanismen erklären. Im Simulationsmodell wird die Asymmetrie jedoch aufgrund der vereinfachenden Annahme eines homogenen Materials vernachlässigt, sodass zum Abgleich der Mittelwert der axialen Messpositionen verwendet wird  $T_{\text{ax}} = (T_{\text{ax,p}} + T_{\text{ax,m}})/2$ . Des Weiteren bestätigt die geringe Differenz zwischen  $T_{\text{ax}}$  und  $T_{\text{rad}}$ , dass die Wärmeleitfähigkeit in axialer Richtung größer sein muss, da bei gegebenem Versuchsaufbau eine isotrope Wärmeleitfähigkeit dazu führen würde, dass  $T_{\text{ax}}$  zunächst schneller abfällt und danach unter  $T_{\text{rad}}$  liegt.

Zur Identifikation von  $\lambda_{\text{ax}}$  und  $\lambda_{\text{rad}}$  muss nun ein Simulationsmodell erstellt werden, das die Realität möglichst gut abbildet. Dafür wird eine transiente CFD-Simulation gewählt und durchgeführt. Abbildung 4.3b zeigt das Rechengitter, bestehend aus 100.000 Fluid- und 30.000 Festkörperelementen. Der Isolationsfolie um die Zelle und der Halterung wird ein für matte Kunststoffe typischer Emissionskoeffizient  $\epsilon$  von 0,9 zugewiesen. Die

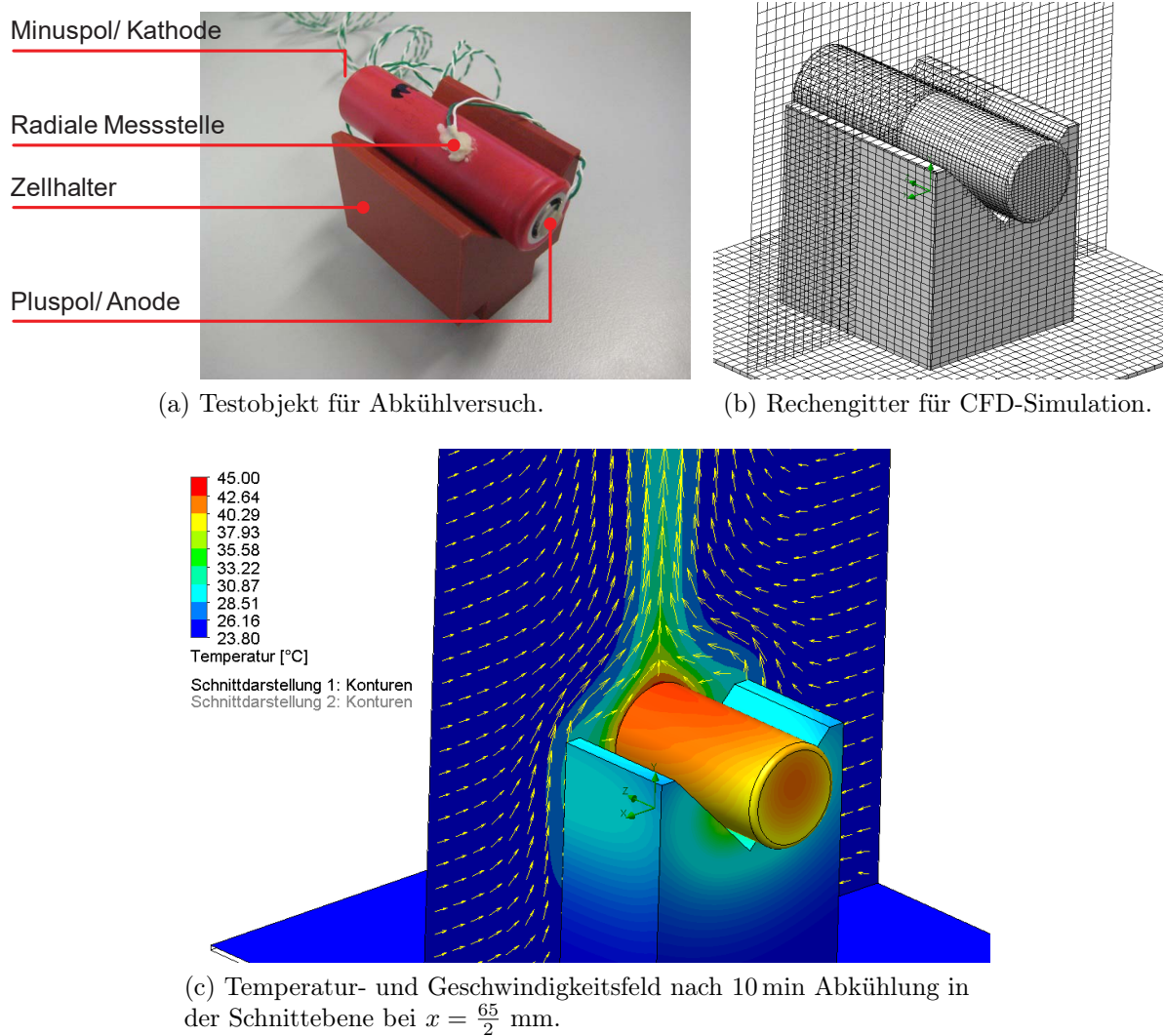


Abbildung 4.3: Abkühlversuch und CFD-Simulation zur Identifikation der thermophysikalischen Parameter einer 18650-Zelle unter freier Konvektion.

Anfangstemperatur der Zelle beträgt  $80^{\circ}\text{C}$ , die der Halterung und der Luft  $23,8^{\circ}\text{C}$ . Die Luft ist zu Beginn, sowie über die gesamte Berechnungszeit an den Rändern, in Ruhe bei Normaldruck. Der Rechenzeitschritt beträgt 1 s. In Abbildung 4.3c ist das Geschwindigkeitsfeld der sich um die Zelle ausbildenden Konvektionsströmung und die Temperaturverteilung nach 10 min dargestellt.

Die in [15] empirisch ermittelten Werte  $\lambda_{\text{ax}} = 30 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  und  $\lambda_{\text{rad}} = 0,2 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  dienen als erste Anhaltswerte für die CFD-Simulation. Abbildung 4.4a zeigt die transiente CFD-Simulation im Vergleich zu den gemittelten Messwerten. Im Simulationsmodell nimmt  $T_{\text{rad}}$  schneller ab als  $T_{\text{ax}}$ , was sich jedoch so nicht in der Messung widerspiegelt. Zudem werden die Temperaturen um ca. 5 K überschätzt. Dieses Verhalten deutet zum einen darauf hin, dass die Anisotropie geringer ausfällt und zum anderen, dass die Wärmeleitfähigkeit absolut gesehen geringer sein muss. Da die Zellen verschiedener Hersteller, wie erläutert, hohe Toleranzen im axialen Aufbau aufweisen, ist davon auszugehen, dass

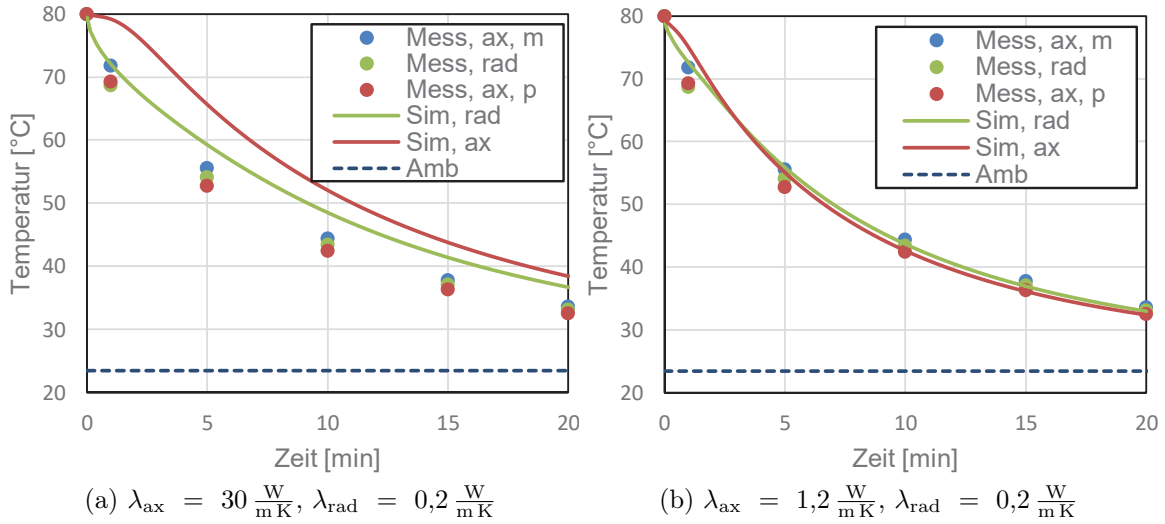


Abbildung 4.4: Abkühlung einer 18650-Zelle unter freier Konvektion.

eher die axiale als die radiale Wärmeleitfähigkeit vom Ausgangswert abweicht. Deswegen wird  $\lambda_{rad}$  festgehalten und  $\lambda_{ax}$  solange reduziert, bis sich die Simulation mit der Messung deckt. Mit  $\lambda_{ax} = 1,2 \frac{W}{mK}$  ergeben sich schließlich die in 4.4b dargestellten Abkühlkurven. Hierbei muss angemerkt werden, dass mittels des Abkühlversuchs nur ein Parameter mit der erforderlichen Messgenauigkeit identifiziert werden kann. Ist eine genauere Identifikation der anisotropen Wärmeleitfähigkeit und der Wärmekapazität gefordert, können diese, wie z.B. in [15] gezeigt, in jeweils einem axialen und radialen Versuchsaufbau mittels Aufheizkurven unter annähernd adiabaten Umgebungsbedingungen ermittelt werden. Ein solcher Versuchsaufbau mit den für Elektrowerkzeug-Akkus typischen Batteriezellen wird Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

## 4.2.2 Elektrisches Zellmodell

Das thermische Modell ist mit den im letzten Abschnitt identifizierten Parametern vollständig beschrieben. Im nächsten Schritt benötigt man ein elektrisches Modell zur Bestimmung der Verlustleistung. In einer Lithium-Ionen-Batterie setzt sich die Verlustleistung maßgeblich aus zwei Anteilen zusammen:

Im Betrieb fließt ein Elektronenstrom durch Ableiter und Elektroden, wobei ohmsche Verluste aufgrund der elektrischen Widerstände entstehen. Im Elektrolyten fließt der Strom in Form von positiven Lithium-Ionen zwischen den Elektroden durch einen Separator. Auch hierbei wird Wärme durch ohmsche Verluste dissipiert. Da sowohl beim Laden als auch Entladen Wärme entsteht, spricht man hier von irreversiblen Verlusten. Sie berechnen sich zu

$$\phi_{irr} = R_{int}(T, SoC)I^2 \quad (4.1)$$

mit dem internen Widerstand  $R_{\text{int}}$  und dem Zellstrom  $I$ .  $R_{\text{int}}$  sinkt dabei mit Ansteigen der Temperatur  $T$  und mit Zunahme des Ladezustands (engl. State of Charge, *SoC*) [18].

Den zweiten Verlustanteil bildet der Wärmestrom  $\phi_{\text{rev}}$ , der bei der elektrochemischen Reaktion anfällt. Es gilt

$$\phi_{\text{rev}} = IT \frac{\Delta S}{nF} \quad (4.2)$$

mit der Faraday-Konstante  $F$ , der Anzahl der ausgetauschten Elementarladungen  $n$  und der Reaktionsentropie  $\Delta S$ . Beim Laden wird der Umgebung Wärme entzogen, d.h. es gilt  $\Delta S < 0$ . Beim Entladen ergibt sich  $\Delta S > 0$ , weshalb sich die Batterie zusätzlich erwärmt.

Weitere, jedoch im Normalbetrieb vernachlässigbare Verlustquellen, sind Mischungsenthalpie  $\phi_{\text{mix}}$  und Reaktionswärme durch Nebenreaktionen  $\phi_{\text{react}}$  [72].

Es gibt nun mehrere Ansätze die Verluste zu bestimmen. In [4] wird beispielsweise ein elektro-thermisches Modell für 18650-Batteriepacks mit einem analytischen Verlustmodell erstellt. Über die Stoffeigenschaften Leitfähigkeit, sowie das elektrische Potential werden die Gesamtverluste berechnet.

Basis des Verlustmodells in dieser Arbeit bildet ein empirisch ermittelter Gleichstromwiderstand  $R_{\text{DC}}$ . Die Zelle wird dazu aufeinanderfolgend mit verschiedenen Stromstärken entladen, siehe Abbildung 4.5. Mit den dabei gemessenen Zellspannungen  $U_1$  und  $U_2$  ergibt sich

$$R_{\text{DC}} = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}. \quad (4.3)$$

Die Dauer und Höhe des Stroms muss so gewählt werden, dass  $U_1$  und  $U_2$  bei annähernd gleichem *SoC* ermittelt werden.

Die Gesamtverlustleistung der Zelle berechnet sich dann zu

$$P_{\text{tot}}(I, T, \text{SoC}) = \phi_{\text{irr}} + \phi_{\text{rev}} = R_{\text{DC}}(T, \text{SoC}) I^2. \quad (4.4)$$

Der Gleichstromwiderstand beinhaltet somit ohmsche und chemische Verluste. Abbildung 4.6a zeigt die Messung des Gleichstromwiderstandes bei konstantem *SoC* von 100 %. Mit steigender Temperatur sinkt der  $R_{\text{DC}}$  annähernd linear, was auf sinkende irreversible Verluste durch steigende elektrische Leitfähigkeit im Elektrolyten zurückzuführen ist. Der temperaturabhängige Anteil kann folglich durch eine lineare Funktion  $R_{\text{DC}}(T) = a - b \cdot T$  beschrieben werden.

Wird der Gleichstromwiderstand bei konstanter Temperatur (25°C) in Abhängigkeit vom *SoC* gemessen, ergibt sich in der Messung 4.6b bei einer Entladung auf unter 20 % *SoC* ein deutlicher Anstieg des  $R_{\text{DC}}$ . Die Korrelation deckt sich u.a. mit Erkenntnissen aus [71] oder [18], in der ein Steigungsanstieg der Zelltemperatur gegen Ende des Entladevorgangs gemessen wird. Der sinkende interne Widerstand  $R_{\text{int}}$  wird



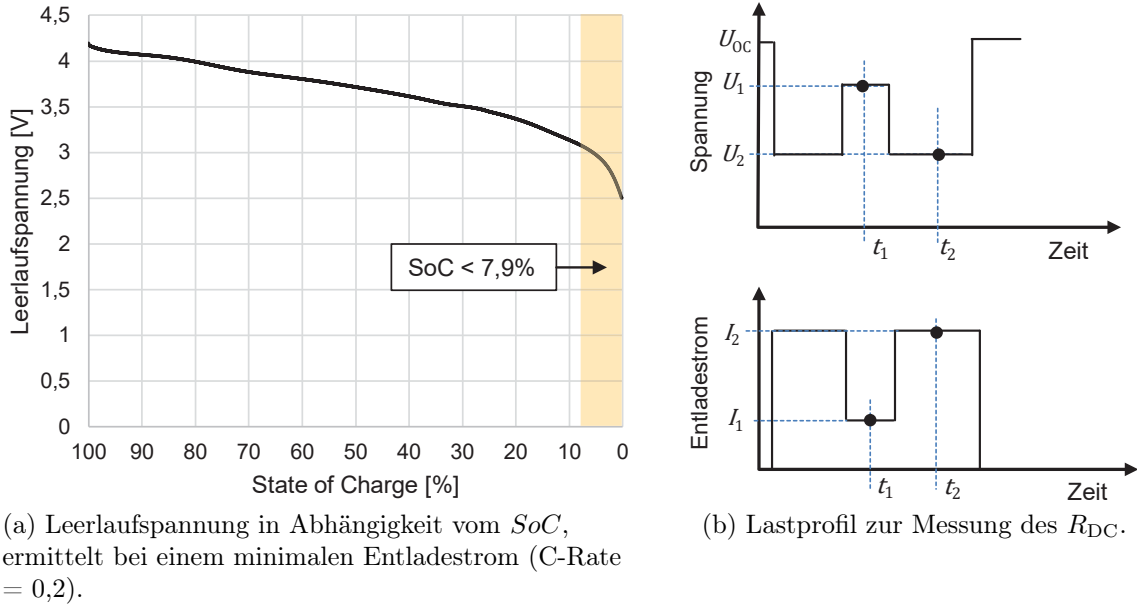


Abbildung 4.5: Messverfahren zur Ermittlung des Gleichstromwiderstandes einer Lithium-Ionen-Zelle.  $U_{OC}$ : Leerlaufspannung

bei niedrigem  $SoC$  durch den Anteil aus der reversiblen Wärme dominiert. Die  $SoC$ -Abhängigkeit ähnelt dabei einer Abklingfunktion und wird deshalb in dieser Arbeit durch  $R_{DC}(SoC) = c \cdot e^{-d \cdot SoC}$  abgebildet.

Die Funktionen  $R_{DC}(T)$  und  $R_{DC}(SoC)$  werden addiert und die Parameter an die Messergebnisse 4.6a und 4.6b gefittet. Es ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} SoC > 7,9\% : \quad R_{DC} &= a - b \cdot T + c \cdot \exp(-d \cdot SoC) & [\text{m}\Omega] \\ SoC < 7,9\% : \quad R_{DC} &= a - b \cdot T + e & [\text{m}\Omega] \end{aligned}$$

mit den identifizierten Parametern  $a = 23,5$ ,  $b = 0,131$ ,  $c = 195,8$ ,  $d = 0,22$  und  $e = c \cdot \exp(-d \cdot 7,9) = 34,4$ . Unterhalb des Grenz- $SoC$  von 7,9% liegen keine Messwerte für  $R_{DC}$  vor, da die Zellspannung in diesem Bereich, siehe Abbildung 4.5a, stark einbricht. Dies führt dazu, dass während des Messzyklus bei Applikation der Messströme die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  nicht eindeutig identifiziert werden können, was hohe Fehlertoleranzen bei der Berechnung des  $R_{DC}$  zur Folge hat. In Ermangelung an Messwerten und ebenso großen Unsicherheiten bei einer möglichen Extrapolation, wird der  $R_{DC}$  daher in diesem Bereich konstant gehalten.

### 4.2.3 Validierung des thermischen Zellmodells

Statt des Abkühlversuchs wird nun die Zelle mit einem Konstantstrom von 10 A von 100%  $SoC$  bis 0 %  $SoC$  unter Standard-Umgebungsbedingungen entladen, siehe Ab-

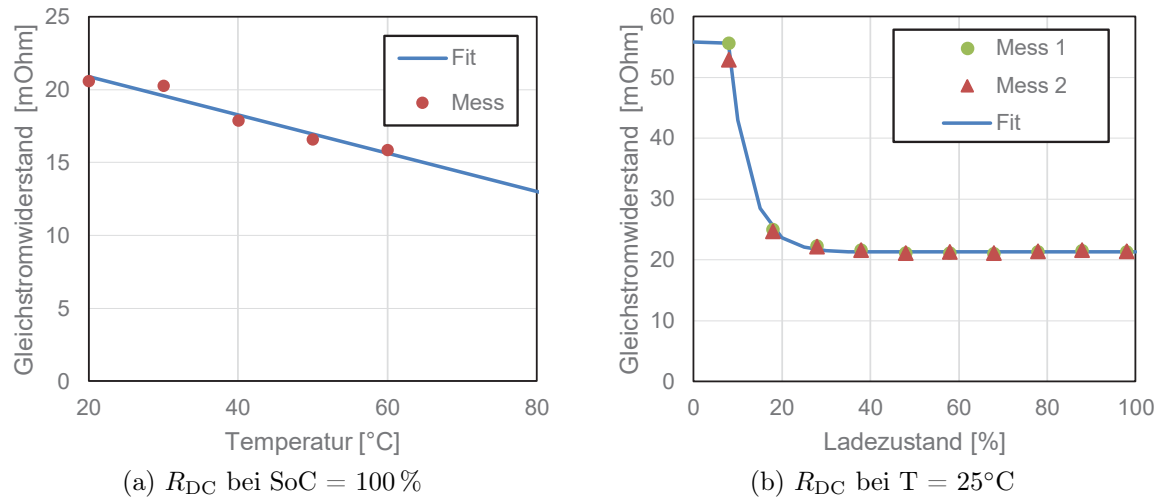


Abbildung 4.6: Messung des Gleichstromwiderstands einer 18650-Zelle. Die durchgezogenen Linien stellen die angeglichenen Funktionen dar.

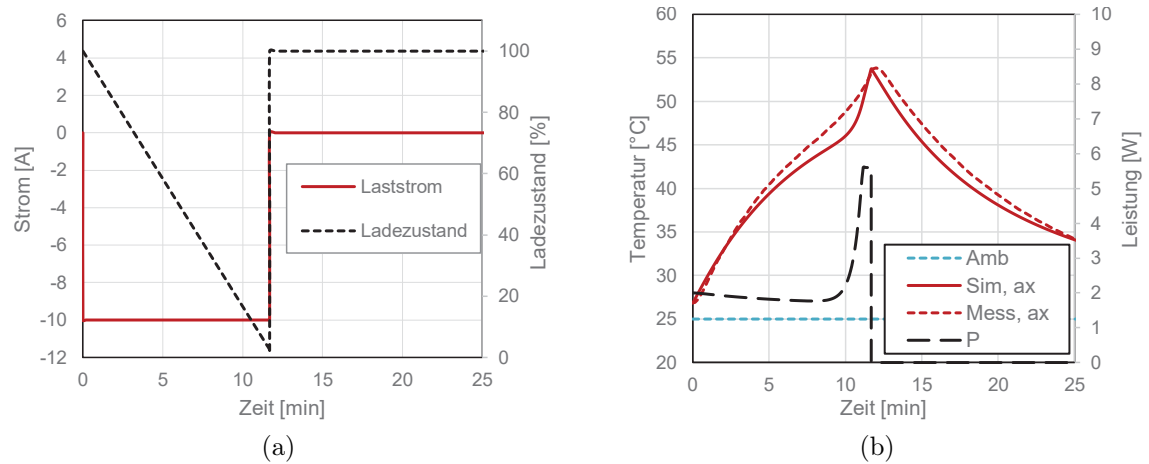


Abbildung 4.7: Messung und Simulation der Erwärmung einer 18650-Zelle bei konstantem Laststrom. Die Messdaten sind gemittelte Daten über 6 Versuche, die im Anhang A.2 dargestellt sind.

bildung 4.7a. Der gemessene Temperaturverlauf, gestrichelte Linie in 4.7b, weist den bereits erwähnten typischen Steigungszuwachs am Ende des Entladevorgangs auf.

Gemäß Gleichung 4.4 wird die in der Zelle anfallende Verlustleistung  $P(t)$  berechnet, welche als homogene Verlustleistungsdichte innerhalb des CFD-Modells aus Abschnitt 4.2.1 Eingang findet. Unter Beibehaltung der bereits beschriebenen Simulationsrandbedingungen (Vernetzung, Rand- und Anfangsbedingungen) ergibt sich der in Abbildung 4.7b dargestellte Temperaturverlauf.

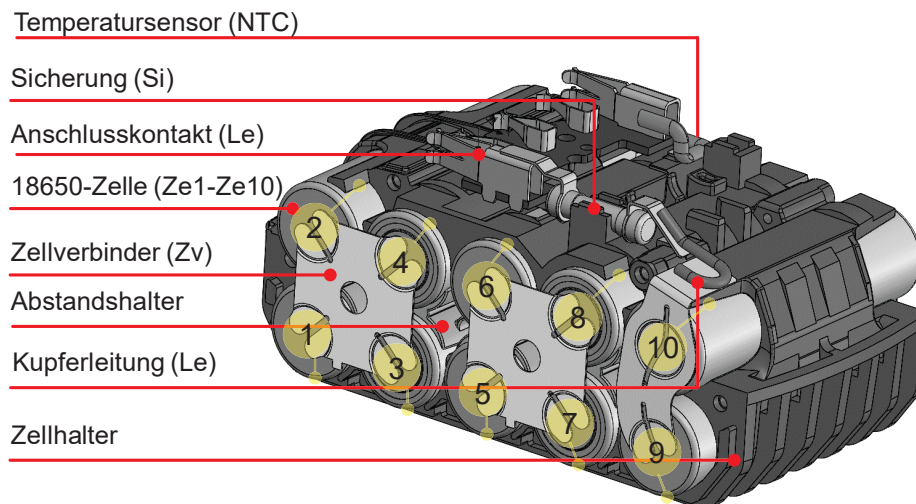


Abbildung 4.8: CAD-Modell des Akkupacks ohne Gehäuse. Messpositionen der Thermoelemente und Nummerierung der Zellen im Zellverbund. Der NTC befindet sich zwischen den Zellen 4 und 6 auf der nicht sichtbaren Seite.

### 4.3 Thermisches Akkupackmodell

Bis jetzt wurde nur eine einzelne Lithium-Ionen-Zelle betrachtet. Im folgenden Kapitel wird das thermische Modell auf den gesamten Akkupack ausgeweitet.

Das Akkupackgehäuse bildet ein offenes System, da es Lüftungsschlitze enthält, die der aktiven Kühlung beim Laden in der Ladestation dienen. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Entladevorgang unter freier Konvektion steht der Zellverbund über den umgebenden Luftspalt und das Gehäuse mit der Umgebung im Austausch.

Ein detailliertes CAD-Modell des Akkupacks ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Für den experimentellen Abgleich wird der Akkupack mit einem konstanten Strom von  $I = 30\text{ A}$  entladen. Bei einem 2-lagigen Pack, entspricht dies einem Strom von  $I_{\text{Lage}} = 15\text{ A}$  pro Lage. Dabei werden die Temperaturen der in der Abbildung markierten axialen Positionen an den Zellen 1 bis 10, sowie die Schmelzsicherungs- und Sensortemperatur mittels angeklebter Thermoelemente gemessen.

Die für das Simulationsmodell verwendeten Material- und Stoffdaten können Tabelle 4.1 entnommen werden. Die thermo-physikalischen Eigenschaften werden innerhalb des betrachteten Temperaturbereich als annähernd konstant angenommen. Das gesamte Rechengebiet wird mit 450.000 Elementen diskretisiert, welche sich in 270.000 Festkörper- und 180.000 Fluidelemente aufteilen, siehe Abbildung 4.9. Die Komponenten Zellhalter, Zellverbinder, Zuleitungen und Gehäuse können aufgrund geringer fertigungstechnischer Toleranzen und homogener Materialeigenschaften recht genau modelliert werden. Die größten Unsicherheiten bezüglich innerem Aufbau, Kontaktwiderständen und Spaltmaßen ist bei der Schmelzsicherung zu erwarten.

Jeder Zelle wird eine Wärmequelle mit homogener volumetrischer Wärmestromdichte mit  $P_{\text{Ze}}(t) = R_{\text{DC}}(t)(I_{\text{Lage}})^2$  zugewiesen. Der zeitabhängige Gleichstromwiderstand wird

Tabelle 4.1: Thermophysikalische Stoffeigenschaften aller Akkupack-Komponenten.

Komponente	Material	$\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$	$c \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$	$\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
18650-Zelle	Ersatzmaterial <sup>1</sup>	rad:0,2 ax:1,2	800	2684
Klemmkontakte, Zellverbinder	Edelstahl	15	510	8100
Gehäuse	PA6-GF35 <sup>2</sup>	0,26	1400	1410
Zellhalter, Abstandshalter	PE-HD <sup>3</sup>	0,42	1900	963
Leitungen	Kupfer	400	384	8960
Sicherung Schmelzelement	Silber	429	235	10500
Sicherung Gehäuse	Keramik	2,6	900	2700
Sicherung Kontaktkappen	Messing	120	377	8400

<sup>1</sup> siehe Abschnitt 4.2

<sup>2</sup> PA6-GF35: Polyamid 6 mit 35 % Glasfaser, <http://www.kern.de>

<sup>3</sup> PE-HD: Polyethylen hoher Dichte, <http://www.kern.de>

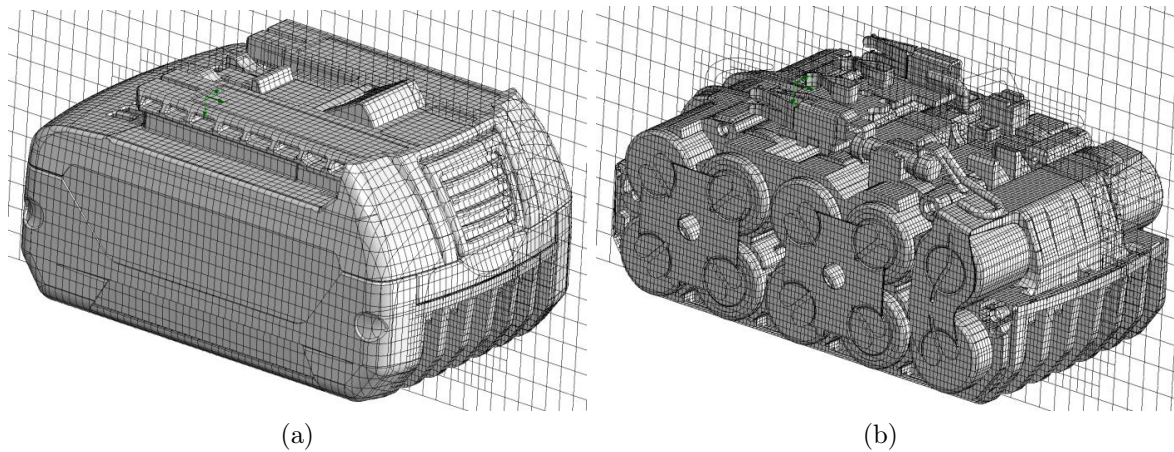


Abbildung 4.9: Rechengitter des Akkupacks mit und ohne Gehäuse. Die Schnittdarstellung zeigt die Vernetzung des umgebenden Fluids.

in Abhängigkeit der mittleren gemessenen Zelltemperatur und des Ladezustands des Akkupacks berechnet. Die Leitungsstücke und das Schmelzelement der Sicherung haben jeweils einen elektrischen Widerstand  $R_{Le}$  von  $0,3 \text{ m}\Omega$ , die Zellverbinder haben jeweils einen Widerstand  $R_{Zv}$  von  $1 \text{ m}\Omega$ . Die Gesamtverlustleistung beträgt dann  $P_{Le} = 5R_{Le}I^2$  bzw.  $P_{Zv} = 6R_{Zv}I^2$ . Der zeitliche Lastverlauf ist dabei qualitativ mit dem aus Abbildung 4.7a zu vergleichen, weshalb er hier nicht explizit dargestellt wird. Das Entladen wird nach 7 Minuten bei einem SoC von 12,5% beendet.

Zunächst werden die gemessenen Temperaturen an den Zelloberflächen, des Sensors und der Sicherung am Ende des Entladevorgangs nach 7 Minuten genauer betrachtet, siehe Abbildung 4.10a.

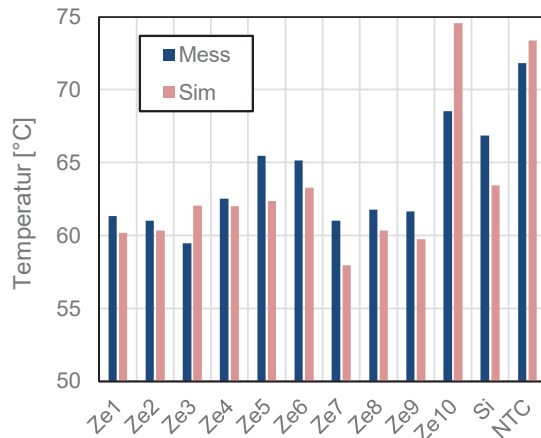
Es zeigt sich, dass der Temperaturhub an Zelle 10 größer ist als beispielsweise an Zelle 2. Grund hierfür ist, dass Zelle 10 zusätzlich durch die in der Nähe befindliche Sicherung und Zuleitung erwärmt wird.

Die in der Mitte des Packs befindlichen Zellen 3 bis 8 erwärmen sich zudem stärker als die Zellen am Rand, da sie thermisch an jeweils 3 Nachbarzellen gekoppelt sind. Die äußeren Zellen sind nur an 2 Nachbarzellen gekoppelt, weshalb sich Zelle 1 und 2 weniger stark erwärmen.

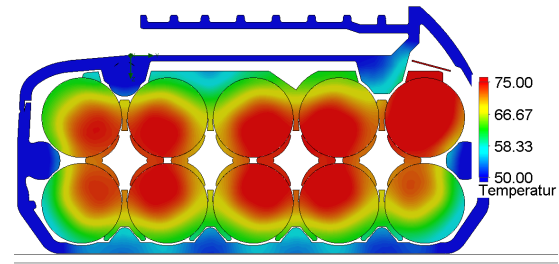
Die Zellen 1,3,5,7 und 9 am Boden des Packs sind thermisch besser an die Umgebung angebunden als die Zellen 2,4, 6 8 und 10, die einen zusätzlichen thermischen Widerstand durch den Luftspalt innerhalb des Gehäuses und das Gehäuse selbst haben. So wird beispielsweise Zelle 4 wärmer als Zelle 3.

Die Qualität des Simulationsmodells wird zum einen durch die absolute und zum anderen die qualitative Vorhersagegenauigkeit bestimmt. Absolut gesehen wird die Temperatur an Zelle 10 überschätzt. Grund dafür könnte ein höherer thermischer Kontaktwiderstand der Schweißverbindung am Zellverbinder oder der Zuleitung sein, sodass der zusätzliche Wärmestrom an Zelle 10 in Realität geringer ausfällt. Qualitativ werden alle Messposition richtig geschätzt, d.h. die besprochenen Effekte werden vom Simulationsmodell korrekt abgebildet. Der zeitliche Verlauf der Temperatur deckt sich ebenso mit der Messung, siehe Abbildung 4.10c und 4.10d.

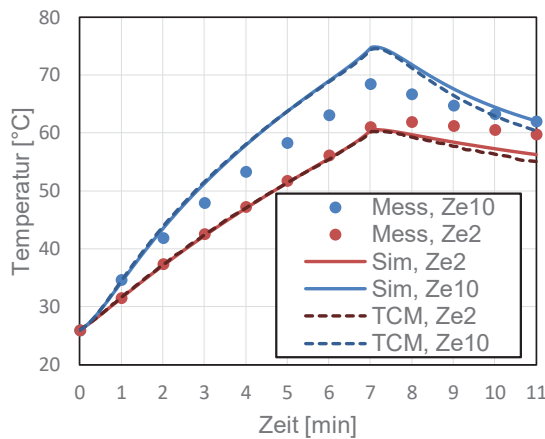
Mit dem CFD-Modell, das mit den Messungen abgeglichen ist, sind nun die Grundlagen für das Kompaktmodell geschaffen.



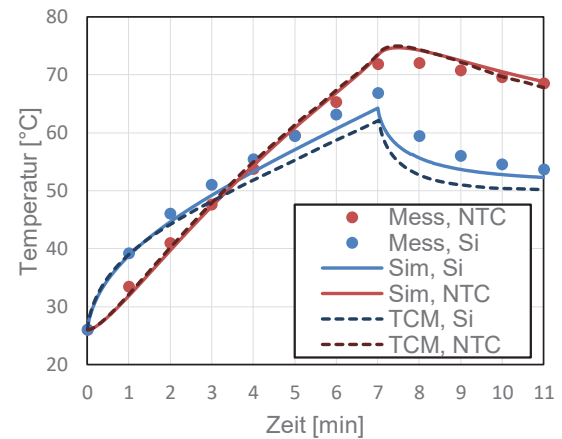
(a) Sensor-Temperaturen nach 7 Minuten.



(b) Schnitt durch Zellverbund auf Höhe der Sensorpositionen nach 7 Minuten.



(c) Verlauf der Sensortemperaturen an den Zellen.



(d) Verlauf der Temperaturen des internen Sensors bzw. der Sicherung.

Abbildung 4.10: Vergleich zwischen Messung (Mess), nichtlinearer CFD-Simulation (Sim) und linearisiertem TCM (TCM) beim Entladen eines Akkupacks mit einem Konstantstrom von 30 A.

## 4.4 Erstellung des Kompaktmodells

Ziel dieses Abschnitts ist die Erstellung eines thermischen Kompaktmodells, das auf dem besprochenen CFD-Modell basiert.

Der Batteriepack steht im System eines Elektrowerkzeugs mit der Umgebung über freie Konvektion und Strahlung in Austausch und bildet ein nichtlineares Wärmeübertragungsproblem. Ursache des nichtlinearen Verhaltens sind folgende Effekte: Bei natürlicher Konvektion wird die Luftströmung durch einen Dichtegradienten in der Luft induziert. Da die Dichte mit steigender Temperatur abnimmt, steigt der Dichtegradient, die Strömungsgeschwindigkeit und somit der Wärmeübergangskoeffizient. Zudem ist Strahlungsaustausch nach Gleichung 2.17 eine Funktion der vierten Potenz der absoluten Temperatur. Mit steigender Verlustleistung nimmt somit der gesamte Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha = \alpha_{\text{str}} + \alpha_{\text{kon}}$  zu, siehe Abbildung 4.11. Um ein Kompaktmodell des

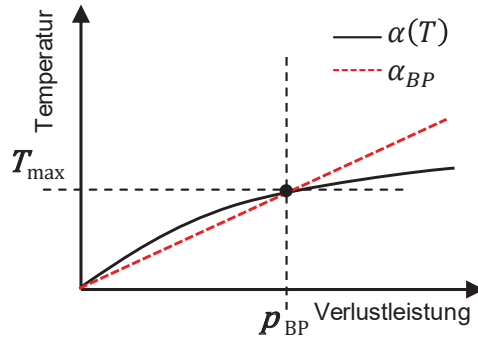


Abbildung 4.11: Qualitative Darstellung des Linearisierungsansatzes

Batteriepacks zu erstellen, muss das Simulationsmodell linearisiert werden [25]. Die Linearisierung erfolgt um einen Betriebspunkt  $\mathbf{p}_{BP}$  mit einem stationären Temperaturfeld  $T_{BP}(\mathbf{r})$ . Bei  $\mathbf{p} < \mathbf{p}_{BP}$  führt dies zur Unterschätzung und bei  $\mathbf{p} > \mathbf{p}_{BP}$  zur Überschätzung der stationären Temperaturen. Mit dem Lastvektor im Arbeitspunkt

$$\mathbf{p}_{BP} = \begin{pmatrix} P_{Ze,1} \\ P_{Ze,2} \\ \vdots \\ P_{Ze,10} \\ P_{Le} \\ P_{Zv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \text{ W} \\ 0,5 \text{ W} \\ \vdots \\ 0,5 \text{ W} \\ 1 \text{ W} \\ 1 \text{ W} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

stellt sich nach stationärer Simulation das in Bild 4.12 dargestellte Temperaturfeld von 25°C - 70°C im Akkupack ein.

Für die anschließenden transienten Simulationen zur Berechnung der Impedanzen wird das stationäre Strömungsfeld eingefroren, womit sich eine konstante Geschwindigkeitsverteilung und somit konstante lokale Wärmeübergangskoeffizienten in Bezug auf die Umgebungstemperatur ergeben. Die Simulationszeit reduziert sich ca. um Faktor 3, da anstelle des konjugierten Problems nur noch das Wärmeleitungsproblem berechnet werden muss. Da sich bei freier Konvektion der Wärmeübergangskoeffizient durch Wärmestrahlung in der gleichen Größenordnung wie der konvektive Wärmeübergangskoeffizient bewegt, darf diese absolut gesehen nicht vernachlässigt werden. Der nichtlineare Effekt fällt jedoch aufgrund der geringen Temperaturerhöhung bei Ermittlung der Impedanzen gering aus. Als Anfangsbedingungen fungiert das stationäre Temperaturfeld. Der Lastvektor ist die Überlagerung aus Lastvektor im Arbeitspunkt und Lastsprungvektor:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{BP} + \mathbf{p}_s. \quad (4.6)$$

Der Rechenzeitschritt werde logarithmisch zwischen 0,01 und 30000 Sekunden verteilt. Die Anzahl der durchgeführten Simulationen entspricht dabei der Anzahl der unabhängigen Wärmequellen. Abbildung 4.13 zeigt das beschriebene Vorgehen am Beispiel der Selbstimpedanz von Zelle 1 und der Koppelimpedanz bezüglich Zelle 10.



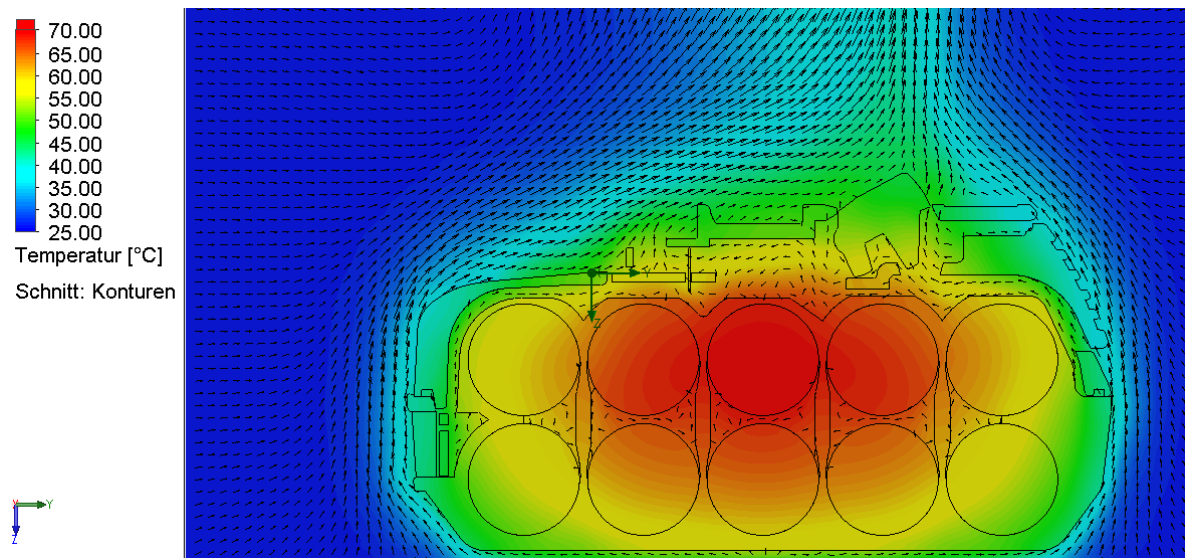


Abbildung 4.12: Stationäres Geschwindigkeitsfeld und Temperaturverteilung.

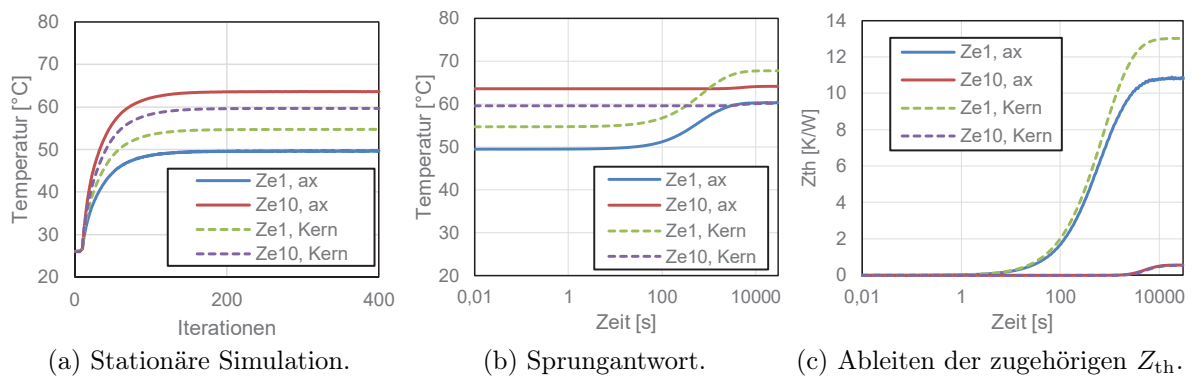
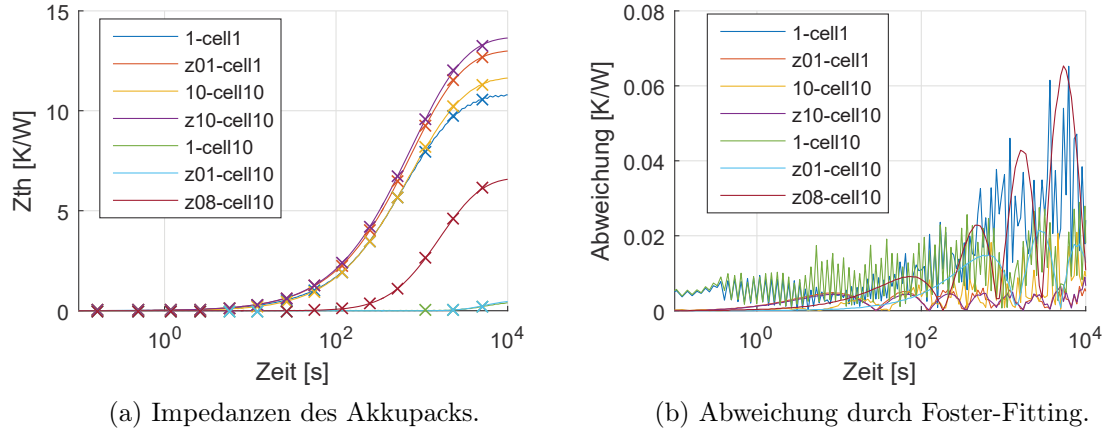


Abbildung 4.13: Linearisierungsansatz am Beispiel eines Leistungssprungs von 10 W in Zelle 1 und Zelle 10.

Der bereits beschriebene Lastfall aus Abschnitt 4.3 wird nun mittels des linearisierten Kompaktmodells simuliert. Dabei kommt die Methode „SimTemp“ des Programms aus Abschnitt 3.3.4 zum Einsatz, die mittels zeitdiskreter Faltung die Temperaturen berechnet. Die Simulationszeit verringert sich im Vergleich zur nichtlinearen CFD-Simulation unter Berücksichtigung des transienten Geschwindigkeitsfeldes von einer Stunde auf weniger als eine Sekunde. In den Abbildungen 4.10c und 4.10d ist der Temperaturverlauf des linearisierten Kompaktmodells als gestrichelte Linie dargestellt. Eine maximale Abweichung von ca. 1,5 K, bzw. 5% zwischen den Verläufen an den axialen Zelltemperaturen und am NTC zeigt, dass mit der Linearisierungsmethode eine hohe Genauigkeit des Kompaktmodells erreicht wird. Die größte Abweichung mit ca. 3 K ergibt sich an der Sicherungsoberfläche, was auf die hohe Temperatur des Schmelzelements und einem damit einhergehenden höheren Fehler bei der Linearisierung zurückzuführen ist. Da die Sicherung jedoch einen geringen Beitrag zur gesamten Verlustleistung bildet und nur





Abbildungung 4.14: Exemplarische Auswahl an berechneten Impedanzen am Akkupack. Gefittete Kurven sind durch Kreuze dargestellt.

einen geringen Einfluss auf die weitaus relevantere Zelltemperatur hat, ist diese Abweichung für die Ausführungen in dieser Arbeit tolerierbar.

#### 4.4.1 Umwandlung in echtzeitfähiges Modell

Zur Berechnung des Temperaturverlaufs über die Faltung muss der Lastverlauf über der Rechenzeit bekannt sein. Diese Bedingung ist jedoch nicht gegeben, wenn z.B. ein noch nicht gemessener Lastfall im Voraus simuliert oder das Kompaktmodell in einen Microcontroller implementiert werden soll, um die Systemtemperatur in Echtzeit zu simulieren. Im ersten Fall ist der Stromverlauf zwar bekannt, jedoch führt  $R_{DC}(T)$  dazu, dass der Lastverlauf von der simulierten Temperatur abhängt. Im zweiten Fall muss auf einen nicht im Voraus bekannten Laststrom reagiert werden.

Um das erforderliche echtzeitfähige Modell zu erstellen, werden die Sprungantworten zunächst an ein geeignetes Foster-Netzwerk gefittet. Aus den Übertragungsfunktionen kann dann ein rekursiver Algorithmus abgeleitet werden, d.h. die Temperatur zum aktuellen Zeitschritt  $T_n$  wird aus den Eingangsgrößen  $P_n(T_{n-1})$  und der Temperatur des letzten Zeitschritts  $T_{n-1}$  berechnet.

Zur Erstellung des Foster-Netzes werden die Impedanzen mittels der Methode „Foster-Fit“ des Programms aus Abschnitt 3.3.4 gefittet. Dabei wird der nichtlineare Matlab-Solvers „lsqnonlin“ unter Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers verwendet. Es zeigt sich, dass im Fall der Selbstimpedanzen 3 Glieder und im Fall der Koppelimpedanzen 4 Glieder, einschließlich negativer RC-Glieder, ausreichende Genauigkeit bieten. Abbildung 4.14 zeigt exemplarisch eine Auswahl der gefitteten Impedanzen. Die Abweichung beträgt in diesem Fall maximal 0,06 K/W.

Liegen die Übertragungsfunktionen als Foster-Netz vor können diese nach Gleichung 3.47 im Frequenz-Bereich dargestellt, und an ein zeitdiskretes digitales Filter gefittet werden [50], [83]. Dazu wird ein IIR-Filter (Infinite Impulse Response) verwendet, das

im Falle eines linearen zeitinvarianten Systems stabil ist und eine hohe Performance bietet. In dieser Arbeit wird - ohne den Umweg über den Frequenzbereich - im Zeitbereich über ein Euler-Rückwärts-Verfahren diskretisiert, bei dem der Differentialquotient durch eine Rückwärtsdifferenz approximiert wird. Für ein einzelnes Foster-Glied ergibt sich aus 3.44

$$T_n = P_n R - C R \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta t}$$

$$T_n = P_n R \frac{\Delta t}{\Delta t + RC} + \frac{RC}{\Delta t + RC} T_{n-1}$$

bzw. für ein Foster-Netz der Ordnung  $K$

$$T_n = \sum_{k=1}^K P_n R_k \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau_k} + \frac{\tau_k}{\Delta t + \tau_k} T_{n-1}. \quad (4.7)$$

#### 4.4.2 Analyse des Kompaktmodells

Im Folgenden wird ein Lastfall auf Basis des Kompaktmodells in Matlab simuliert und mit einer Messung verglichen. Dazu wird ein Hochstrom-Lastprofil (kurz HLP)

$$I_{\text{HLP}}(t) = \begin{cases} I_{4,\text{max}}, & \Delta t_4 \\ I_3, & \Delta t_3 \\ I_2, & \Delta t_2 \\ I_1, & \Delta t_1 \\ I_{0,\text{min}} = 0 \text{ A}, & \Delta t_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

mit Dauer von insgesamt 18s solange wiederholt, bis der Akkupack vollständig entladen ist. Bei einem 4-Ah-Pack ergeben sich damit 20 HPD bei einer Entladetiefe von 0,2 Ah pro HPD. Der Ladezustand wird dabei über die Coulomb-Counting-Methode bestimmt, wonach sich die verbleibende Kapazität zu  $C = C_0 - \int I(t)dt$  ergibt.  $C_0$  bezeichnet die Kapazität der Zelle, wenn sie voll geladen ist.

Der Referenzsensor ist ein flächiges PT100-Element und befindet sich auf der Oberfläche von Zelle 2. Die Umgebungstemperatur beträgt 26°C, die Anfangstemperatur des Akkupacks 30°C, der anfängliche Ladezustand liegt bei 100 %. Die Entladung wird bei Erreichen einer Sensortemperatur von  $T_{\text{cutoff}}$  unterbrochen und nach Unterschreiten von  $T_{\text{restart}}$  fortgesetzt. Sobald der Akku entladen ist, wird er bis 30°C abgekühlt.

Der Berechnungszeitschritt ist variabel und beträgt unter Last 0,05s, ansonsten 1s. Die Umgebungstemperatur liegt 4 K unter der Anfangstemperatur und wird durch die allgemeine Randbedingung von -4 K im Lastvektor berücksichtigt. Die zur Simulation zugehörige Verlustleistung ist in Abbildung 4.15c dargestellt. Die Berechnungszeit des

thermo-elektrischen Modells liegt bei unter einer Minute für eine Simulationszeit von 10,000 s.

Abbildung 4.15a zeigt den Vergleich zwischen Kompaktmodell und Messung anhand des Referenzsensors. Man sieht, dass die vollständige Entladung des Packs in der Simulation ca. 30% länger dauert. Diese Abweichung zur Messung ergibt sich durch eine geringfügige Überschätzung des Temperaturhubs pro HLP um etwa 15%. In Abbildung 4.15b wird dies bei Betrachtung des ersten Aufheizvorgangs ersichtlich. In der Messung werden 12 HLPs untergebracht bis die Grenztemperatur des Referenzsensors erreicht ist. In der Simulation ergeben sich nur 10 HLPs, siehe auch Abbildung 4.15d. Das thermo-elektrische Modell erreicht somit beim Entladen eine Genauigkeit zur Prädiktion des Temperaturhubs von  $\pm 15\%$ . Während der Abkühlzeiten bildet das Modell das thermische Verhalten des Akkupacks gut ab, was sich anhand der annähernd parallel verlaufenden Temperaturkurven erkennen lässt.

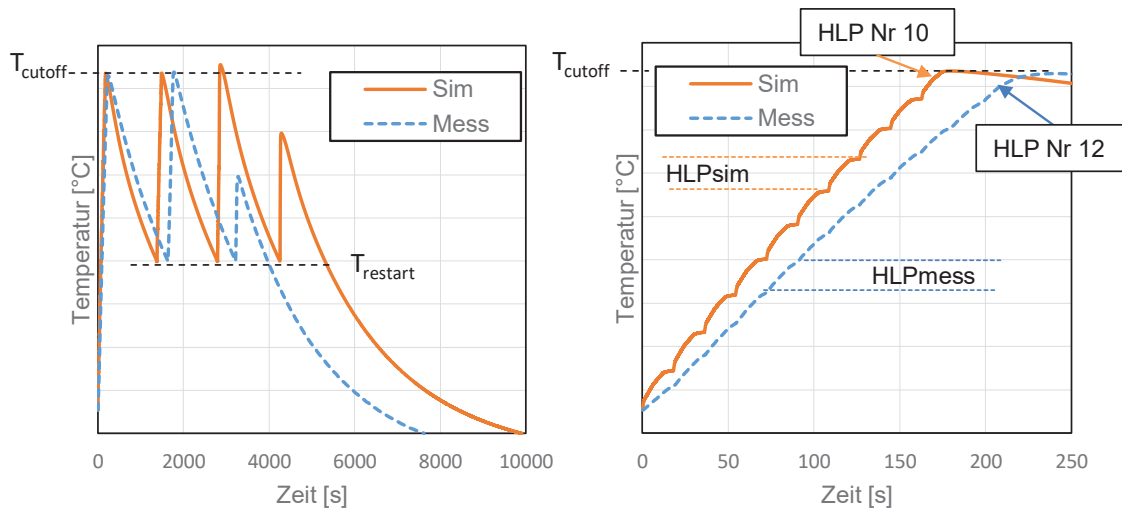
Betrachtet man die mittleren Zelltemperaturen, 4.16a, die für deren Alterung entscheidend sind, so ist ersichtlich, dass zwischen den äußeren und den mittig im Pack befindlichen Zellen eine Temperaturdifferenz von bis zu 10 K besteht, wie es beispielsweise die Differenz zwischen Zelle 2 und 6  $\Delta T = T_6 - T_2$  im Diagramm 4.16b zeigt. Dies kann zu Debalancierung führen, wenn der Akkupack über längere Zeit betrieben wird. Die mittlere Zelltemperatur liegt zudem stets über der Temperatur, die an deren Oberfläche gemessen wird. D.h. ein Alterungs-Modell, das nur die Oberflächentemperaturen berücksichtigt, würde die Lebensdauer eines Akkupacks überschätzen.

Bei der Bewertung der Modellgenauigkeit muss beachtet werden, dass Batteriezellen, wie bereits diskutiert, gewissen Herstellungstoleranzen unterliegen und damit ihr Innenwiderstand sowie ihre thermophysikalischen Parameter nie genau gleich sind. Das bedeutet, dass die an der einzelnen Zelle ermittelten Parameter nicht unbedingt identisch mit den im Akkupack verbauten Zellen sein müssen.

Eine weitere Ursache der angesprochenen Abweichung beim Entladen kann z.B. darin liegen, dass der Referenzsensor in der Messung eine gewisse thermische Kapazität hat und einen Teil der Wärme an der Messstelle abführt, wodurch die Oberflächentemperatur unterschätzt würde.

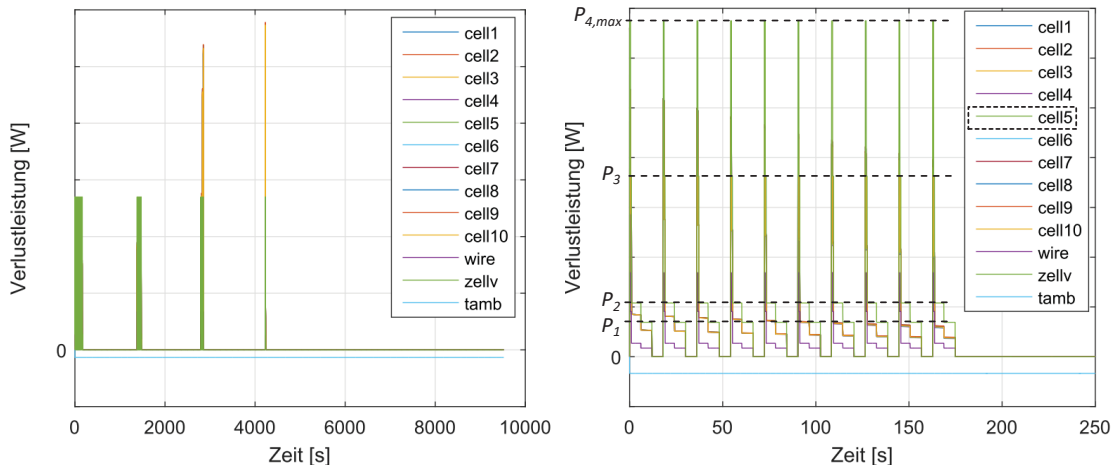
Beim Aufbau eines komplexen Modells, wie das eines Akkupacks, aus toleranzbehafteten Komponenten ist nur selten eine hohe Genauigkeit bezüglich von Absolutwerten zu erzielen. Jedoch kann ein solches Modell unter anderem dazu helfen, Wirkzusammenhänge wie z.B. das Quantifizieren der Debalancierung über einen Lebenszyklus, besser zu verstehen.

Steigt die Modellkomplexität weiter an, ist es sinnvoll, soweit möglich, das System in seine Teilkomponenten zu zerlegen, separat zu simulieren und zur Gesamtlösung wieder zusammenzusetzen. Dieser Prozess der sogenannten Substrukturierung wird Gegenstand des nun folgenden Kapitels sein.



(a) Temperatur des Referenzsensors bei vollständiger Entladung.

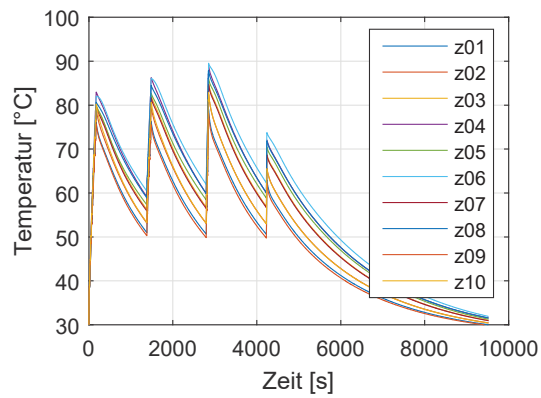
(b) Temperatur des Referenzsensors bei Teilentladung. Die einzelnen Temperaturhübe entsprechen jeweils einem HLP (Hochstrom-Lastprofil).



(c) Verlustleistung im Simulationsmodell über vollständige Entladung.

(d) Verlustleistung im Simulationsmodell über Teilentladung. Die Markierungen  $P_1$  bis  $P_{4,max}$  beziehen sich exemplarisch auf Zelle 5.

Abbildung 4.15: Vergleich des Kompaktmodells mit Messung bei einer vollständigen Entladung des Akkupacks durch ein Hochstrom-Lastprofil.



(a) Zellkerntemperaturen

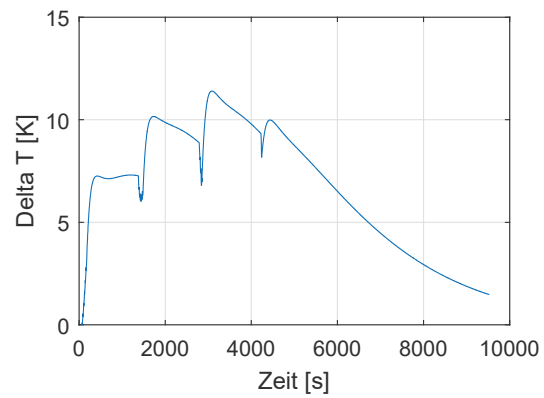
(b) Temperaturdifferenz zwischen Zelle 2 und 6:  
 $\Delta T = T_6 - T_2$ 

Abbildung 4.16: Analyse der Zelltemperaturen mittels TCM-Simulation bei einer vollständigen Entladung des Akkupacks durch ein Hochstrom-Lastprofil.

## 5 Kopplung thermischer Kompaktmodelle

Überschreitet ein zu simulierendes System eine gewisse Komplexität, kann es sinnvoll sein, dieses zunächst in Subsysteme geringerer Komplexität aufzuteilen und separat zu evaluieren. Man nennt diesen Prozess Substrukturierung. Das Verhalten des ursprünglichen, komplexen Systems wird dann aus dem der Substrukturen abgeleitet.

Vorteile und Eigenschaften der Substrukturierung ergeben sich aus folgenden Punkten [77]:

**Methodenunabhängig:** Die Berechnungsmethode kann an die Anforderungen des jeweiligen Subsystem angepasst werden. So werden fluiddynamische Subsysteme, z.B. ein Kühlwasserstrom, für gewöhnlich mit CFD berechnet. Wärmeleitungssysteme können mit der FEM oder FDM, für einfache Fälle auch analytisch gelöst werden.

**Concurrent Engineering:** Verschiedene Teams können gleichzeitig an jeweils einem Subsystem arbeiten. Wenn sich das Design *einer* Substruktur ändert, ist nur diese davon betroffen.

**Parallelisierung:** Die Substrukturierung erlaubt es die Teilsysteme parallel zu berechnen und somit die Berechnungsdauer zu verkürzen. Wird ein System mit insgesamt  $n$  Freiheitsgraden in zwei Teilsysteme mit jeweils  $n/2$  Freiheitsgrade aufgeteilt, reduziert sich die Berechnungszeit für beide Teilsysteme zusammen beträchtlich, da die Größe der Systemmatrizen von  $n^2$  auf  $2 \cdot (n/2)^2 = n^2/2$  abnimmt.

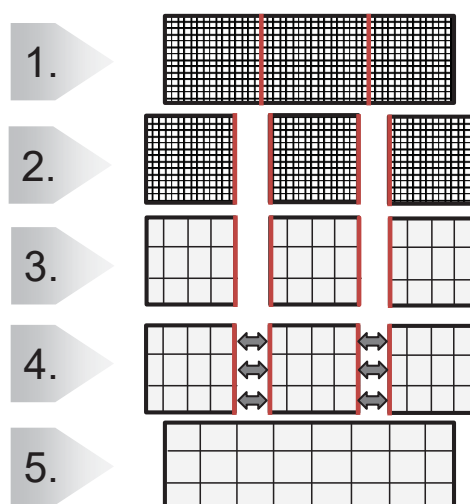


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung eines allgemeinen Substrukturierungsprozesses. 1: Originalsystem, 2: Substrukturierung, 3: Erstellung des Kompaktmodells der Substrukturen, 4: Kopplung der Kompaktmodelle, 5: Berechnung des Gesamtsystems.

**Optimierung:** Bei einer Optimierung müssen nur die Substrukturen, die von der Geometrieänderung betroffen sind, erneut berechnet werden.

Sind die Substrukturmodelle erstellt, müssen diese über die Grenzflächen, an denen sie unterteilt wurden (im Folgenden als Interface bezeichnet), gekoppelt werden. Die schematische Darstellung des Prozesses ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

In dieser Arbeit wird ein neues Verfahren zur Substrukturierung und Kopplung thermischer Kompaktmodelle vorgestellt. Um dieses hinsichtlich seiner Vor- und Nachteile besser einordnen zu können, wird im Folgenden zunächst ein Überblick über gängige Methoden der Substrukturierung gegeben.

## 5.1 Stand der Technik

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene, bereits existierende Ansätze zur Substrukturierung gezeigt.

### 5.1.1 Component Mode Synthesis

Die Component Mode Synthesis (CMS) ist ein eigenständiges Modellordnungsreduktions-Verfahren (kurz MOR-Verfahren), das darauf basiert, die Struktur in Substrukturen (Komponenten) zu zerlegen und separat zu berechnen. Sie findet hauptsächlich in der Strukturdynamik Anwendung [59], [77], [48], jedoch gibt es auch Ansätze, diese auf thermische Problemstellungen anzuwenden [10].

Bei der CMS werden ähnlich wie beim Guyan-Verfahren aus Abschnitt 3.1.2 die internen Knoten der Komponenten in Slave- und die Rand-Knoten in Master-Knoten aufgeteilt. Man setzt dann die Lösung aus den Eigenmoden der Komponenten durch Erzeugung sogenannter Superelemente zusammen, wobei die Master-Knoten erhalten bleiben.

### 5.1.2 Domain Decomposition Method

Mit der Domain Decomposition Method (engl. für Gebietszerlegung, kurz DDM) ist es möglich, das Rechengebiet zur Finite-Element-Analyse in Subsysteme aufzuteilen und diese auf jeweils einem Prozessor bzw. Computer zu berechnen [63]. Jedes Subsystem wird dabei von einem Prozessor in einem iterativen Verfahren gelöst, sodass die einzelnen Lösungen zur Lösung des Gesamtsystems konvergieren. Die Berechnungszeit wird durch diese Form der Parallelisierung deutlich reduziert, jedoch resultiert aus der DDM kein Kompaktmodell.

### 5.1.3 Substrukturierung mittels Guyan-Verfahren

In Kapitel 3.1.2 wurde bereits das Guyan-Verfahren im Rahmen der MOR beschrieben. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie zwei mittels der Guyan-Methode reduzierte Sub-

strukturen gekoppelt werden können. Die beiden auf sogenannte Masterknoten (Index  $m$  für Master) reduzierten Systeme lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{m1}\dot{\mathbf{T}}_{m1} + \mathbf{K}_{m1}\mathbf{T}_{m1} &= \boldsymbol{\phi}_{m1} \\ \mathbf{C}_{m2}\dot{\mathbf{T}}_{m2} + \mathbf{K}_{m2}\mathbf{T}_{m2} &= \boldsymbol{\phi}_{m2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Hierbei müssen die Masterknoten zwingenderweise die gemeinsamen Interfaceknoten enthalten.

Mit der Koppelbedingung  $\mathbf{T}_{m1,i} = \mathbf{T}_{m2,i}$  bzw.  $\dot{\mathbf{T}}_{m1,i} = \dot{\mathbf{T}}_{m2,i}$  können die Interfaceknoten von System 2 eliminiert werden. Man blockstrukturiert die beiden Ausgangsgleichungen so, dass  $\mathbf{T}_1$  die Interface-Knoten  $\mathbf{T}_{m1,i}$  enthält und  $\mathbf{T}_2$  alle anderen verbleibenden Knoten:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_1 \\ \dot{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Wenn man die Koppelbedingung durch  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{X}\mathbf{T}_2$  und  $\dot{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{X}\dot{\mathbf{T}}_2$  umformuliert, ergibt sich:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad [\mathbf{I} - \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_1 \\ \dot{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren kann das gekoppelte System folgendermaßen erstellt werden:

$$\mathbf{C}'\dot{\mathbf{T}}_2 + \mathbf{K}'\mathbf{T}_2 = \boldsymbol{\phi}'. \quad (5.4)$$

Dabei gilt für die Systemmatrizen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &= \mathbf{X}^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{21} \mathbf{X} + \mathbf{K}_{22}, \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{X}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{C}_{12} + \mathbf{C}_{21} \mathbf{X} + \mathbf{C}_{22} \text{ und} \\ \mathbf{F}' &= \mathbf{X}^T \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\phi}_2. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung der Guyan-Methode zur Erstellung gekoppelter kompakter Subsysteme wird die minimale Knotenzahl durch die Anzahl der Interface-Knoten bestimmt. Soll das Kompaktmodell genau sein, impliziert dies eine feine Diskretisierung des FE-Netzes und somit eine hohe Ordnung des MOR-Modells.



### 5.1.4 Substrukturierung mittels Arnoldi-Verfahren

Der Nachteil eines relativ hochdimensionalen MOR-Modells resultierend aus der Guyan-Reduktion soll mit folgender Methode umgangen werden [66], [7]. Die Substrukturierung mittels Arnoldi-Verfahren basiert darauf, die Substrukturen mittels Arnoldi-Verfahren zu reduzieren um ein gekoppeltes reduziertes System zu erhalten, obwohl die Interfaceknoten nicht physikalisch erhalten bleiben, wie in Abschnitt 3.1.1 erläutert wurde.

Zunächst werden die ursprünglichen Substrukturen 1 und 2 in ein gemeinsames Gleichungssystem überführt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_1 \\ \dot{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Handelt es sich nun um ein gekoppeltes System, strömt Wärme über die Interfaceknoten beider Systeme. Die Wärmeströme über die Interfaceknoten von Substruktur 1 zu 2 werden mit  $\phi_{i1}$  bezeichnet, die von 2 zu 1 hingegen mit  $\phi_{i2}$ , wobei der Index  $i$  für Interface steht. Beim Kontakt zweier Festkörper gilt die Koppelbedingung  $\phi_{i1} = -\phi_{i2} = \alpha_K(\mathbf{T}_{i1} - \mathbf{T}_{i2})$  mit der Kontaktleitfähigkeit  $\alpha_K$ , wie in Abschnitt 2.4.4 erläutert. Umformuliert ergibt sich in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

mit

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_K & \cdots & -\alpha_K & 0 \\ 0 & -\alpha_K & \cdots & \alpha_K & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Die Matrix enthält nur an den Positionen der Interfaceknoten Einträge die ungleich Null sind. Die rechte Seite von Gleichung 5.6 wird nun zum Lastvektor von Gleichung 5.5 addiert:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_1 \\ \dot{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Dieses Gleichungssystem beschreibt die beiden gekoppelten noch nicht ordnungsreduzierte Systeme. Per Projektion und den generalisierten Koordinaten werden diese jeweils in zwei gekoppelte reduzierte Systeme überführt. Die Projektionsmatrix kann z.B. über den Arnoldi-Algorithmus oder einen modalen Ansatz erstellt werden.

Beim Arnoldi-Algorithmus kann eine hohe Anzahl der Interfaceknoten zu Problemen führen, weshalb eine gröbere Diskretisierung des Interfaces vorgeschlagen wird. Dabei

muss jedoch ein Genauigkeitsverlust in Kauf genommen werden. Beim modalen Ansatz muss der Nutzer die wichtigen Eigenmoden bestimmen, was die in Kapitel 3.1.3 diskutierten Schwierigkeiten mit sich bringt.

### 5.1.5 Kopplung Impedanz-basierter Kompaktmodelle

Ein in der Literatur häufig zu findender Fall ist die serielle Schaltung von Foster- und Cauer-Netzen, was einer Kopplung zweier thermischer Substrukturen entspricht, in welchen es einen dominierenden Wärmepfad gibt. Die Autoren in [57] koppeln die thermische Impedanz zwischen Sperrschicht und Kühlkörper eines Leistungshalbleiters  $Z_{th,JC}$  (Junction-Case, kurz JC) mit der Impedanz vom Kühlkörper zur Umgebung  $Z_{th,CA}$  (Case-Ambient, kurz CA) durch Addition beider  $Z_{th}$ -Kurven. Dies entspricht einer seriellen Schaltung zweier Foster-Netzwerke, was aus den in Abschnitt 3.3.3.4 erläuterten Gründen zu einem unphysikalischen transienten Verhalten führt. Je nach Anwendungsfall muss entschieden werden, ob der systematische Fehler im transienten Bereich in Kauf genommen werden kann.

In [28] werden zwei thermische Subsysteme, Leistungsmodul und Kühlkörper, Sperrschicht zum Gehäuse und Gehäuse zur Umgebung, bestehend aus jeweils einer Foster-Leiter verkoppelt. Dazu werden diese zunächst Cauer-transformiert und am thermischen Widerstand, der das Gehäuse repräsentiert, verbunden. Abschließend wird das gekoppelte System wieder in ein Foster-Netz zur einfacheren mathematische Beschreibung rücktransformiert.

Die Autoren in [85] verfolgen den Ansatz Cauer- mit Foster-Netzwerken zu verkoppeln. Die diskreten auf einem Kühlkörper montierten Leistungshalbleiter werden als ungekoppelte Cauer-Selbstimpedanzen aus Temperaturmessungen an deren Gehäuse (Epoxy Mold Compound, EMC) erstellt. Im zweiten Schritt werden die Selbst- und Koppelimpedanzen der auf dem Kühlkörper befindlichen Lötflächen aus einer FE-Simulation erzeugt und an ein Foster-Netz gefittet. Im Schaltungssimulator werden beide Netzwerke über Oberflächenströme zum Gesamtsystem verkoppelt.

Des Weiteren findet man Ansätze, Systemmatrizen bestehend aus Impedanzen formal zu koppeln. In [26] wird zum ersten Mal eine Theorie zur Kopplung von Impedanz-basierten Systemmatrizen vorgestellt, die jedoch keine praktische Anwendung findet. Die ursprünglichen Systemmatrizen wurden dabei über die Green-Funktion für das gesamte Temperaturfeld hergeleitet und danach ordnungsreduziert.

In [27] wird eben beschriebener Ansatz auf die Kopplung der Subsysteme  $Z_{th,JC}$  und  $Z_{th,CA}$  mit inhomogener Temperaturverteilung an den Kontaktflächen erweitert. Da die Impedanzen in diesem Fall Laplace-transformiert wurden, kann der Faltungsoperator durch einfache Multiplikation ersetzt werden. Damit ergibt sich die Ausgangsmatrix des gekoppelten Systems zu

$$\mathbf{Z}_{JA}(s) = \mathbf{Z}_{JC}(s) + \frac{\mathbf{M}_{JC}(s)}{1 - \mathbf{Z}_{CA}(s)\mathbf{M}_{CC}(s)} \mathbf{Z}_{CA}(s)\mathbf{M}_{CJ}(s). \quad (5.9)$$

Die benötigten Eingangsmatrizen  $\mathbf{Z}_{JC}$ ,  $\mathbf{Z}_{CA}$ ,  $\mathbf{M}_{JC}$ ,  $\mathbf{Z}_{CA}$ ,  $\mathbf{M}_{CC}$  und  $\mathbf{M}_{CJ}$  können dabei aus FE-Simulationen der Substrukturen abgeleitet werden. Die Matrixelemente bestehen bei diesem Ansatz aus rationalen Funktionen, die eine analytische Betrachtung aufgrund der hohen Komplexität bei den Matrixinversionen nur schwer möglich machen. Die Autoren empfehlen deshalb auf numerische Verfahren zurückzugreifen.

Es zeigt sich, dass bisherige Ansätze zur Kopplung von  $Z_{th}$ -Modellen zwar theoretisch entwickelt wurden, diese jedoch folgende Nachteile aufweisen:

- ungenau aufgrund vereinfachender Annahmen.
- unpraktisch, da zunächst Cauer- bzw. Foster-Transformationen vor der Kopplung durchgeführt werden müssen.
- unübersichtlich, da komplexe äquivalente Netzwerke im Schaltungssimulator aufgebaut werden müssen.
- zu komplex bei analytischen Verfahren, um sie in der Praxis anzuwenden.

Im folgenden Kapitel soll nun ein neuartiger Ansatz zur Kopplung von  $Z_{th}$ -Modellen entwickelt werden, der die genannten Nachteile minimiert.

## 5.2 Neuer Ansatz zur Kopplung von $Z_{th}$ -Modellen

Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte nun vorgestellte neuartige Ansatz, im Folgenden als CoC-Verfahren (Coupling of Compact Thermal Models by Convolution and Deconvolution) bezeichnet, koppelt die aus den Substrukturen resultierenden  $Z_{th}$ -Matrizen im diskreten Zeitbereich. Orientiert man sich an dem skizzierten Ablaufschema von Bild 5.1, so werden zunächst ausgehend vom Originalmodell (Schritt 1) detaillierte Modelle der Substrukturen erstellt (Schritt 2). Danach werden die  $Z_{th}$ -Matrizen der Substrukturen abgeleitet (Schritt 3). Die  $Z_{th}$ -Matrizen werden gekoppelt (Schritt 4) und in ein gekoppeltes Kompaktmodell überführt (Schritt 5). Ein konkreter Vorteil gegenüber klassischer MOR-Modell-Kopplungsverfahren ergibt sich daraus, dass die benötigten zeitdiskreten  $Z_{th}$  mit jeder Simulationssoftware berechnet werden können. Es muss kein Zugriff auf Systemmatrizen erfolgen. Folglich werden die bereits beschriebenen Vorteile gängiger Substrukturierungsverfahren mit den Vorteilen der Systembeschreibung mittels zeitdiskreter  $Z_{th}$ -Kurven vereint.

Herausforderungen ergeben daraus, dass an den Grenzflächen zweier thermischer Systemen eine inhomogene Temperaturverteilung vorliegen kann. Dies liegt u.a. daran, dass ein Wärmestrom durch einen Leiter (z.B. Kupfer), angrenzend an einen „Isolator“ (z.B. FR4), nicht nur durch den Leiter fließt, sondern sich auch im Isolator fortsetzt. Dieser Effekt wird Wärmespreizung genannt und ist für thermische Systeme typisch, da die Wärmeleitfähigkeit eines guten und schlechten Wärmeleiters recht nahe beieinander liegt. Zum Vergleich: bzgl. der elektrischen Leitfähigkeit liegt das Verhältnis zwischen Kupfer und FR4 bei *nur*  $10^8$ , bzgl. der Wärmeleitfähigkeit nur bei  $10^3$ . Aus diesem

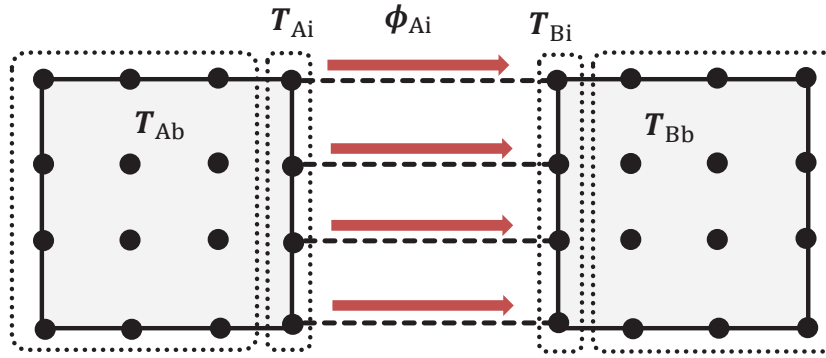


Abbildung 5.2: Teilsysteme A und B eines substrukturierten thermischen Systems. *b*: Bulk-Knoten, *i*: Interface-Knoten, *n*: Anzahl der Interface-Knoten. Die gestrichelten Linien zeigen die zu koppelnden Knoten-Paare an.

Grund muss besonderes Augenmerk auf die Diskretisierung bzw. Aufteilung des Interface in homogene Bereiche gelegt werden.

### 5.2.1 Herleitung des CoC-Verfahrens

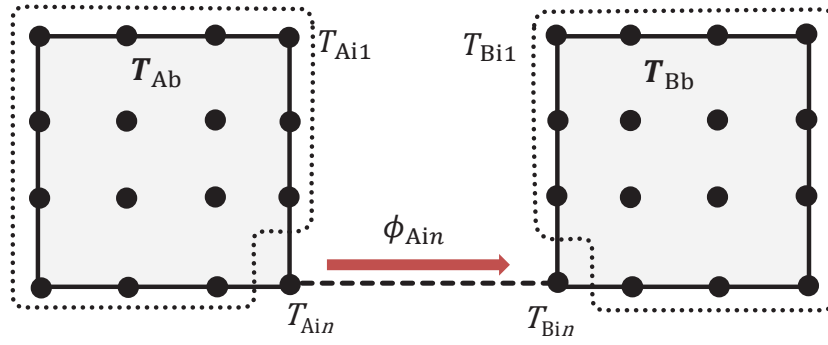
Das CoC-Verfahren setzt nach Schritt 3 aus dem Ablaufschema 5.1 an, d.h. sobald die Impedanzmatrizen der Substrukturen erstellt wurden. Hierbei ist zu beachten, dass neben den Impedanzen wichtiger Punkte innerhalb des Systems, wie z.B. Sensortemperatur oder Chiptemperatur, (Bulk-Knoten) zusätzlich die Impedanzen der Interfaceknoten benötigt werden. Die Anzahl der Interfaceknoten *n* beider Systeme an der jeweiligen Koppelfläche muss übereinstimmen. Abbildung 5.2 zeigt exemplarisch die Substrukturen A und B, die nach Bulk- und Interfaceknoten aufgeteilt sind.

Damit lassen sich die jeweiligen ungekoppelten Systeme nach 3.39 durch die Übertragungsmatrizen  $\mathbf{Z}_A$  und  $\mathbf{Z}_B$  beschreiben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_{Ab} \\ T_{Ai} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Ab} & \mathbf{Z}_{Aib} \\ \mathbf{Z}_{Abi} & \mathbf{Z}_{Ai} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{s}_{Ab} \\ \dot{\phi}_{Ai} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_{Bb} \\ T_{Bi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Bb} & \mathbf{Z}_{Bib} \\ \mathbf{Z}_{Bbi} & \mathbf{Z}_{Bi} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{s}_{Bb} \\ \dot{\phi}_{Bi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ziel ist die Verkopplung beider Systeme durch geeignete Oberflächenwärmeströme über das Interface. Die Koppelrandbedingung aus Gleichung 2.24, übertragen auf das thermische Kompaktmodell, schreibt vor, dass die Temperaturen am Interface identisch sind, d.h.  $T_{Ai} = T_{Bi}$ . Außerdem hebt sich die Summe der Wärmeströme am Interface auf, sodass gilt  $\dot{\phi}_{Bi} = -\dot{\phi}_{Ai}$ . Mit diesen beiden Bedingungen folgt für die Interface-Knoten aus Gleichung 5.10

$$T_{Ai} = \mathbf{Z}_{Abi} * \dot{s}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Ai} * \dot{\phi}_{Ai} = \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{s}_{Bb} - \mathbf{Z}_{Bi} * \dot{\phi}_{Ai} = T_{Bi} \quad (5.11)$$

Abbildung 5.3: Kopplung des n-ten Interface-Knotens  $A_{in}$ .

bzw. mit der Substitution  $\mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_{Ai} + \mathbf{Z}_{Bi}$

$$\mathbf{Z}_c * \dot{\phi}_{Ai} = -\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bi}. \quad (5.12)$$

Es gilt nun, den Oberflächenwärmestrom  $\phi_{Ai}$  über das Interface zu bestimmen.

Naheliegender wäre es, Gleichung 5.12 in folgender Weise umzuformen:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{Ai}^T * \mathbf{Z}_c^T &= (-\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bi})^T \\ \dot{\phi}_{Ai}^T &= (-\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\phi}_{Bi})^T *^{-1} \mathbf{Z}_c^T \\ \dot{\phi}_{Ai} &= \mathbf{Z}_c^T *^{-1} (-\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bi})^T, \end{aligned} \quad (5.13)$$

mit dem Entfaltungsoperator  $*^{-1}$ , der die Umkehrfunktion der Faltung (auch Dekonvolution) darstellt. In der programmtechnischen Umsetzung hat sich gezeigt, dass dieses Verfahren numerisch instabil ist, weshalb hier ein iterativer Ansatz vorgeschlagen wird.

### 5.2.1.1 Kopplung des n-ten Interface-Knotens

Das System muss dazu so aufgeteilt werden, dass zunächst, wie in Bild 5.3 gezeigt, alle  $n - 1$  Interface-Knoten den Bulk-Knoten temporär zugeordnet werden. Aus Gleichung 5.10 ergibt sich ein vereinfachtes System mit nur einem Interface-Knoten ( $A_{in}$ ) bzw. ( $B_{in}$ ), wobei der Index  $n$ , der die Nummer des Knotens bezeichnet, der Übersichtlichkeit wegen, weggelassen wird:

$$\begin{bmatrix} T_{Ab} \\ T_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Ab} & \mathbf{Z}_{Aib} \\ \mathbf{Z}_{Abi} & \mathbf{Z}_{Ai} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{Ab} \\ \dot{\phi}_{Ai} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} T_{Bb} \\ T_{Bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Bb} & \mathbf{Z}_{Bib} \\ \mathbf{Z}_{Bbi} & \mathbf{Z}_{Bi} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{Bb} \\ \dot{\phi}_{Bi} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

mit  $\dim(T_{Ai}, T_{Bi}, \mathbf{Z}_{Ai}, \mathbf{Z}_{Bi}, \dot{\phi}_{Ai}, \dot{\phi}_{Bi}) = (1,1)$ . Analog zu Gleichung 5.12 und 5.13 ergibt sich

$$\begin{aligned}
Z_c * \dot{\phi}_{Ai} &= -\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bb} \\
\dot{\phi}_{Ai} &= (-\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bb}) *^{-1} Z_c.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Mit dem resultierenden Koppelwärmestrom für *einen* Interfaceknoten  $\dot{\phi}_{Ai}$  führen die ersten Zeilen beider Systeme 5.14 im gekoppelten Zustand zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{Ab} &= \mathbf{Z}_{Ab} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Aib} * \dot{\phi}_{Ai} \\
&= \mathbf{Z}_{Ab} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Aib} * [(-\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} + \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bb}) *^{-1} Z_c]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{Bb} &= \mathbf{Z}_{Bb} * \dot{\mathbf{s}}_{Bb} + \mathbf{Z}_{Bib} * (-\dot{\phi}_{Ai}) \\
&= \mathbf{Z}_{Bb} * \dot{\mathbf{s}}_{Bb} + \mathbf{Z}_{Bib} * [(\mathbf{Z}_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}_{Ab} - \mathbf{Z}_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}_{Bb}) *^{-1} Z_c].
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Nun werden sukzessive die Systemmatrizen des einfach gekoppelten Systems  $\mathbf{Z}'_{Ab}$ ,  $\mathbf{Z}'_{ABb}$ ,  $\mathbf{Z}'_{BAb}$ , und  $\mathbf{Z}'_{Bb}$  bestimmt.  $\mathbf{Z}'_{Ab}$  und  $\mathbf{Z}'_{ABb}$  erhält man durch einen normierten Sprung in den Bulk-Knoten von System A, d.h.  $\dot{\mathbf{s}}_{Ab} = \dot{\theta} \mathbf{E}$  und  $\dot{\mathbf{s}}_{Bb} = 0$ . Mit dem Faltungssatz  $f(t) * \dot{\theta}(t) = f(t)$  ergeben die Gleichungen 5.17 und 5.18

$$\mathbf{Z}'_{Ab} = \mathbf{Z}_{Ab} - \mathbf{Z}_{Aib} * (\mathbf{Z}_{Abi} *^{-1} Z_c) \tag{5.19}$$

$$\mathbf{Z}'_{ABb} = \mathbf{Z}_{Bib} * (\mathbf{Z}_{Abi} *^{-1} Z_c). \tag{5.20}$$

Analog ergibt sich für die Impedanzen bei Leistungseinprägung in den Bulk-Knoten von System B mit  $\dot{\mathbf{s}}_{Bb} = \dot{\theta} \mathbf{E}$  und  $\dot{\mathbf{s}}_{Ab} = 0$

$$\mathbf{Z}'_{BAb} = \mathbf{Z}_{Aib} * (\mathbf{Z}_{Bbi} *^{-1} Z_c) \tag{5.21}$$

$$\mathbf{Z}'_{Bb} = \mathbf{Z}_{Bb} - \mathbf{Z}_{Bib} * (\mathbf{Z}_{Bbi} *^{-1} Z_c). \tag{5.22}$$

Die Submatrizen können zur einfach gekoppelten Systemmatrix  $\mathbf{Z}'_{AB}$  angeordnet werden:

$$\mathbf{Z}'_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_{Ab} & \mathbf{Z}'_{BAb} \\ \mathbf{Z}'_{ABb} & \mathbf{Z}'_{Bb} \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Damit ergibt sich für das gekoppelte System:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{Ab} \\ \mathbf{T}'_{Bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_{Ab} & \mathbf{Z}'_{BAb} \\ \mathbf{Z}'_{ABb} & \mathbf{Z}'_{Bb} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{Ab} \\ \dot{\mathbf{s}}_{Bb} \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

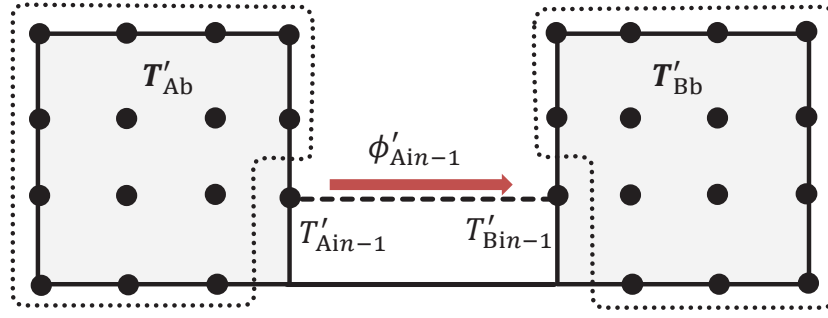


Abbildung 5.4: Kopplung des zweiten Interface-Knotens  $A'_{in-1}$  (gestrichelte Linie) im bereits einfach gekoppelten System (durchgezogene Linie).

### 5.2.1.2 Kopplung weiterer Interface-Knoten

$\mathbf{Z}'_{AB}$  wird nun so aufgeteilt, dass der nächste Interface-Knoten ( $A_{in} - 1$ ) bzw. ( $B_{in} - 1$ ), der vorher den Bulk-Knoten zugeordnet wurde, die jeweils letzte Zeile der oberen bzw. unteren Hälfte von  $\mathbf{Z}'_{AB}$  bildet. Auch hier wird wieder, der Übersichtlichkeit wegen, auf den Index  $n - 1$  verzichtet, wohl wissend, dass es sich hierbei um den zweiten zu koppelnden Interfaceknoten handelt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{Ab} \\ T'_{Ai} \\ \mathbf{T}'_{Bb} \\ T'_{Bi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_{Ab} & \mathbf{Z}'_{Aib} & \mathbf{Z}'_{BAb} & \mathbf{Z}'_{BAib} \\ \mathbf{Z}'_{Abi} & \mathbf{Z}'_{Ai} & \mathbf{Z}'_{BAbi} & \mathbf{Z}'_{BAi} \\ \mathbf{Z}'_{ABb} & \mathbf{Z}'_{ABib} & \mathbf{Z}'_{Bb} & \mathbf{Z}'_{Bib} \\ \mathbf{Z}'_{ABbi} & \mathbf{Z}'_{ABi} & \mathbf{Z}'_{Bbi} & \mathbf{Z}'_{Bi} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} \\ \dot{\phi}'_{Ai} \\ \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} \\ \dot{\phi}'_{Bi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Abbildung 5.4 zeigt die Kopplung des zweiten Interface-Knotens  $A'_{in-1}$  im bereits einfach gekoppelten System. Mit der Koppel-Randbedingung  $T'_{Ai} = T'_{Bi}$  folgt

$$\begin{aligned} T'_{Ai} &= \mathbf{Z}'_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{Ai} * \dot{\phi}'_{Ai} + \mathbf{Z}'_{BAbi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} + \mathbf{Z}'_{BAi} * \dot{\phi}'_{Bi} \\ &= \mathbf{Z}'_{ABbi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{ABi} * \dot{\phi}'_{Ai} + \mathbf{Z}'_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} + \mathbf{Z}'_{Bi} * \dot{\phi}'_{Bi} = T'_{Bi}. \end{aligned}$$

Mit dem zweiten Teil der Koppel-Randbedingung  $\dot{\phi}'_{Bi} = -\dot{\phi}'_{Ai}$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'_{Abi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{Ai} * \dot{\phi}'_{Ai} + \mathbf{Z}'_{BAbi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} - \mathbf{Z}'_{BAi} * \dot{\phi}'_{Ai} \\ = \mathbf{Z}'_{ABbi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{ABi} * \dot{\phi}'_{Ai} + \mathbf{Z}'_{Bbi} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} - \mathbf{Z}'_{Bi} * \dot{\phi}'_{Ai} \end{aligned}$$

und durch Umformen

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}'_{Abi} - \mathbf{Z}'_{ABbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + (\mathbf{Z}'_{BAbi} - \mathbf{Z}'_{Bbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} \\ = (-\mathbf{Z}'_{Ai} - \mathbf{Z}'_{Bi} + \mathbf{Z}'_{BAi} + \mathbf{Z}'_{ABi}) * \dot{\phi}'_{Ai}, \end{aligned}$$

sodass sich schließlich für den Koppelwärmestrom

$$\dot{\phi}'_{Ai} = ((\mathbf{Z}'_{Abi} - \mathbf{Z}'_{ABbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + (\mathbf{Z}'_{BAbi} - \mathbf{Z}'_{Bbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c \quad (5.26)$$

mit  $\mathbf{Z}'_c = -\mathbf{Z}'_{Ai} - \mathbf{Z}'_{Bi} + \mathbf{Z}'_{BAi} + \mathbf{Z}'_{ABi}$  ergibt. Die Temperaturen des zweifach gekoppelten Systems lauten nun

$$\begin{aligned} \mathbf{T}''_{Ab} &= \mathbf{Z}'_{Ab} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{Aib} * \dot{q}'_{Ai} + \mathbf{Z}'_{BAb} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} - \mathbf{Z}'_{BAib} * \dot{q}'_{Ai} \\ &= \mathbf{Z}'_{Ab} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{BAb} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} + (\mathbf{Z}'_{Aib} - \mathbf{Z}'_{BAib}) * \dot{\phi}'_{Ai} \\ &= \mathbf{Z}'_{Ab} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{BAb} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} + (\mathbf{Z}'_{Aib} - \mathbf{Z}'_{BAib}) * \\ &\quad [((\mathbf{Z}'_{Abi} - \mathbf{Z}'_{ABbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + (\mathbf{Z}'_{BAbi} - \mathbf{Z}'_{Bbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}''_{Bb} &= \mathbf{Z}'_{ABb} * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + \mathbf{Z}'_{Bb} * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb} + (\mathbf{Z}'_{ABib} - \mathbf{Z}'_{Bib}) * \\ &\quad [((\mathbf{Z}'_{Abi} - \mathbf{Z}'_{ABbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Ab} + (\mathbf{Z}'_{BAbi} - \mathbf{Z}'_{Bbi}) * \dot{\mathbf{s}}'_{Bb}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c] \end{aligned}$$

Für die Blöcke der Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}''_{AB}$  gilt

$$\mathbf{Z}''_{Ab} = \mathbf{Z}'_{Ab} + (\mathbf{Z}'_{Aib} - \mathbf{Z}'_{BAib}) * [(\mathbf{Z}'_{Abi} - \mathbf{Z}'_{ABbi}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c] \quad (5.27)$$

$$\mathbf{Z}''_{ABb} = \mathbf{Z}'_{ABb} + (\mathbf{Z}'_{ABib} - \mathbf{Z}'_{Bib}) * [(\mathbf{Z}'_{Abi} - \mathbf{Z}'_{ABbi}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c] \quad (5.28)$$

$$\mathbf{Z}''_{Bb} = \mathbf{Z}'_{Bb} + (\mathbf{Z}'_{ABib} - \mathbf{Z}'_{Bib}) * [(\mathbf{Z}'_{BAbi} - \mathbf{Z}'_{Bbi}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c] \quad (5.29)$$

$$\mathbf{Z}''_{BAb} = \mathbf{Z}'_{BAb} + (\mathbf{Z}'_{Aib} - \mathbf{Z}'_{BAib}) * [(\mathbf{Z}'_{BAbi} - \mathbf{Z}'_{Bbi}) *^{-1} \mathbf{Z}'_c] \quad (5.30)$$

$$\mathbf{Z}''_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}''_{Ab} & \mathbf{Z}''_{BAb} \\ \mathbf{Z}''_{ABb} & \mathbf{Z}''_{Bb} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Alle Schritte in Abschnitt 5.2.1.2 werden nun solange wiederholt, bis alle  $n$  Interface-Knoten gekoppelt sind.

### 5.2.2 Programmtechnische Umsetzung

Zur Berechnung des Koppelwärmestroms wird nach Abschnitt 5.2.1 die Entfaltungs-Operation (auch Dekonvolution) benötigt, welche die Umkehrung der Faltung darstellt, d.h.  $T(t) = Z_{th}(t) * \dot{P}(t)$  kann zu  $\dot{P}(t) = T(t) *^{-1} Z_{th}(t)$  umgeformt werden. Ist die diskrete Ausgangsfunktion  $\dot{P}(k)$  kausal, d.h. es gilt  $\dot{P}(k) = 0, \forall k < k_0$  kann die zeitdiskrete



Entfaltung exakt berechnet werden. Das bedeutet, dass der Ausgangswert nur vom aktuellen und den vergangenen Eingangswerten abhängt, was im Falle des Wärmestroms gegeben ist. Gleichung 3.54 kann direkt nach  $\dot{P}(k)$  umgestellt werden:

$$\begin{aligned}\dot{P}(1) &= \frac{T(1)}{Z_{\text{th}}(1)} \\ \dot{P}(2) &= \frac{T(2) - Z_{\text{th}}(2)\dot{P}(1)}{Z_{\text{th}}(1)} \\ \dot{P}(3) &= \frac{T(3) - Z_{\text{th}}(2)\dot{P}(2) - Z_{\text{th}}(3)\dot{P}(1)}{Z_{\text{th}}(1)}.\end{aligned}$$

Für  $k > 1$  folgt in verallgemeinerter Form

$$\dot{P}(k) = \frac{T(k) - \sum_{j=2}^k Z_{\text{th}}(j)\dot{P}(k-j+1)}{Z_{\text{th}}(1)}. \quad (5.32)$$

### 5.2.2.1 Programmablaufplan der Methode „Koppeln“

Das Programm zur Kopplung von Kompaktmodellen basiert auf der in Abschnitt 3.3.4 vorgestellten TCM-Klasse. Den Programmablaufplan der zugehörigen Methode „Koppeln“ zeigt Abbildung 5.5. Eingabeparameter sind die zwei zu koppelnden Objekte der Klasse TCM (Obj1 und Obj2), die gewünschte Interpolationsmethode (IntPolMeth) und der gewünschte Ausgabezeitvektor (ZeitOut). Ist das Format der Eingangsgrößen korrekt, kann die Kopplung erfolgen. Dazu werden zunächst die Impedanzmatrizen so angeordnet, dass die gemeinsamen Interfaceknoten die letzten Zeilen bzw. Spalten bilden. Nun wird der minimale Zeitschritt der Eingangs- $Z_{\text{th}}$  bestimmt (Step). Werden mit diesem weniger als 10.000 Zeitschritte benötigt, können die Eingangsmatrizen auf einmal interpoliert werden. Bei mehr als 10.000 benötigten Zeitschritten werden die Eingangs- $Z_{\text{th}}$  für jede Dekade separat interpoliert. Sobald die Interpolation auf einen konstanten Zeitschritt erfolgt ist, können die  $Z_{\text{th}}$ -Matrizen mittels des CoC-Verfahrens gekoppelt werden.

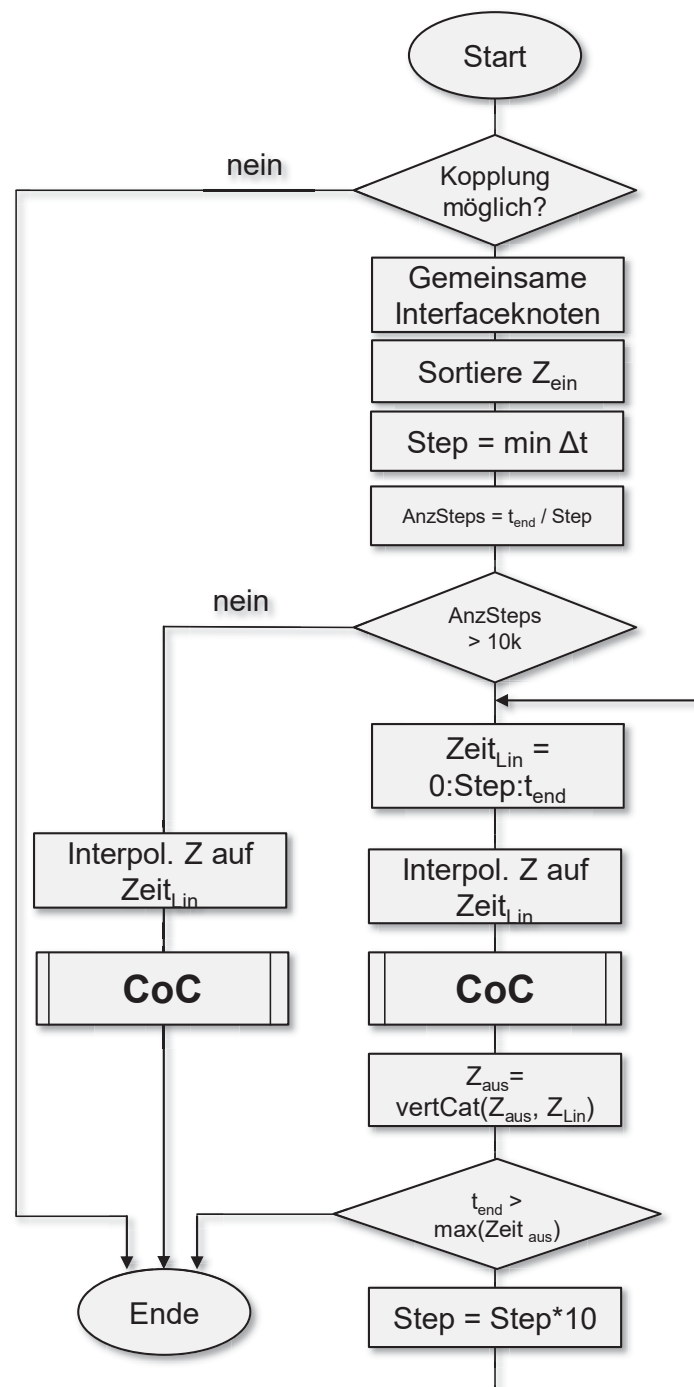


Abbildung 5.5: Programmablaufplan zur Kopplung zweier Kompaktmodelle via CoC-Verfahren (Methode „Koppeln“).

### 5.2.3 Benchmark des CoC-Verfahrens

In den vorangegangenen Abschnitten wurde das CoC-Verfahren für allgemeine Fälle hergeleitet und in einem Computer-Programm umgesetzt. Das folgende Kapitel soll anhand akademischer Testfälle zeigen, wo die Stärken und Grenzen des Verfahrens liegen. Allen Testfällen ist gemein, dass zunächst die Referenzimpedanzen der ungekoppelten Systeme  $\mathbf{Z}_{A,\text{ref}}$  und  $\mathbf{Z}_{B,\text{ref}}$  berechnet werden. Danach werden die entsprechenden Interface-Knoten im konzentrierten Massenmodell verbunden, um die Referenzimpedanzen des gekoppelten Systems  $\mathbf{Z}_{\text{ref}}$  abzuleiten. Zum Vergleich werden die ungekoppelten Systeme über das CoC-Verfahren zum System  $\mathbf{Z}_{\text{CoC}}$  gekoppelt. Als Maß für die Qualität wird die prozentuale Abweichung zum Zeitpunkt  $n$  wie folgt berechnet:

$$\epsilon_k(n) = \frac{Z_{k,\text{Ref}(n)} - Z_{k,\text{CoC}(n)}}{Z_{k,\text{Ref}(n)}} \cdot 100 \quad [\%] \quad (5.33)$$

Absolute Abweichungen  $Z_{k,\text{Ref}(n)} - Z_{k,\text{CoC}(n)}$  kleiner als  $10 \cdot 10^{-4} \text{ K/W}$  werden vernachlässigt, d.h. es gilt  $\epsilon(n) = 0$ . Im folgenden werden die Referenzmodelle vorgestellt, anhand derer verschiedene Testfälle durchgeführt werden.

#### 5.2.3.1 Beschreibung der Referenzsysteme

Es werden zunächst 5 Referenzmodelle für die betrachteten Testfälle basierend auf konzentrierten Massenmodellen nach Kapitel 3.2 erstellt. Diese sind in den Abbildungen 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 und 5.10 dargestellt und bestehen aus jeweils 16 Knoten, die zur eindeutigen Zuordnung von links nach rechts, Zeile für Zeile durchnummeriert werden. Knoten Nummer 1 von System A wird im Folgenden mit  $A_1$ , Knoten Nummer 2 von System B mit  $B_2$  usw. bezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber ist lediglich ein Knoten mit Widerständen und Kapazität dargestellt. Um das Modell einfach zu halten, haben alle Knoten in System A die gleichen Widerstände und Kapazitäten,  $R_A$  und  $C_A$ , respektive in System B  $R_B$  und  $C_B$ . Die Massensymbole, dargestellt durch Dreiecke, entsprechen Dirichletschen Randbedingungen mit  $T_D = 0$ .  $P_A$  bzw.  $P_B$  stellen punktförmige Wärmequellen dar.

Die thermischen Impedanzen werden an den Stellen  $P_A$  bzw.  $P_B$  sowie an den entsprechenden Koppelknoten  $i_n$  gebildet und werden in den folgenden Abbildungen zur besseren Lesbarkeit unter Verzicht auf das vorangestellte „Zth“ durch PA, PB, i1, i2 etc. dargestellt.

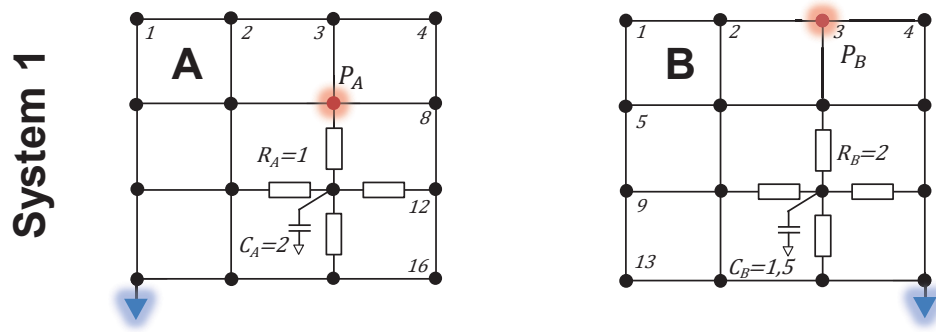


Abbildung 5.6: System 1 mit Substruktur-Zeitkonstanten gleicher Größenordnung ( $\tau_A = 2$ ,  $\tau_B = 3$ ). Die Teilsysteme haben jeweils eine Dirichlet-Randbedingung und eine Wärmequelle.

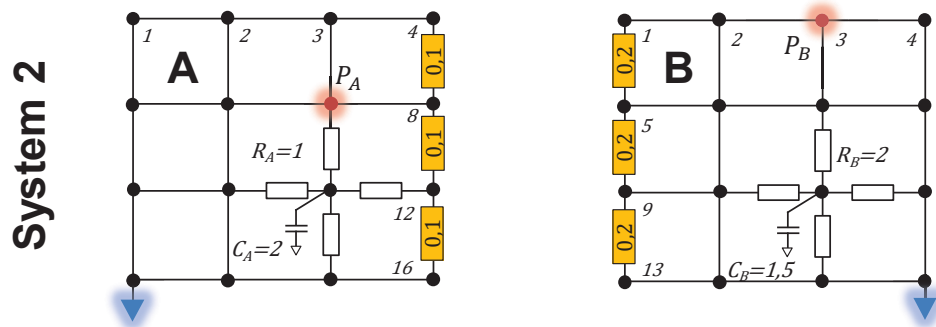


Abbildung 5.7: System 2 mit verringertem thermischen Widerstand im Bereich des Interface.

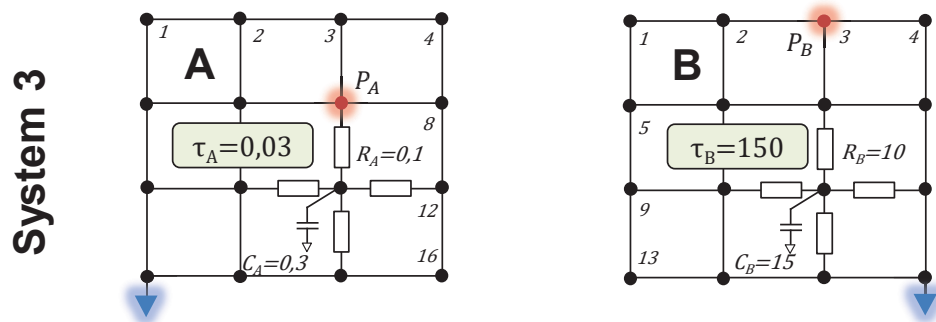


Abbildung 5.8: System 3 mit stark unterschiedlichen Substruktur-Zeitkonstanten.

System 4

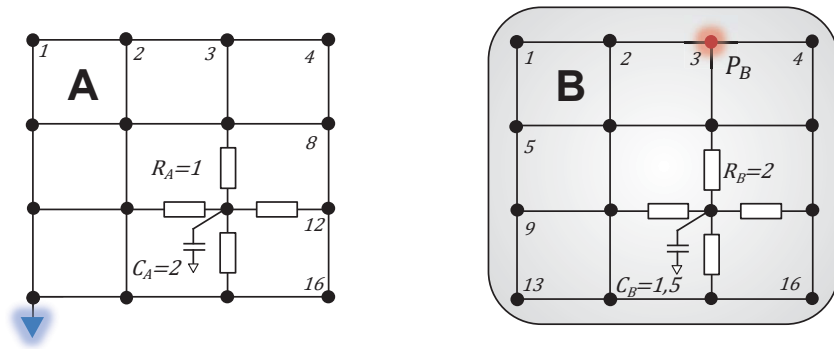


Abbildung 5.9: System 4 unterscheidet sich von System 1 durch Fehlen der Dirichlet-Randbedingung an Knoten  $B_{16}$ , wodurch System B ein adiabates System bildet.

System 5

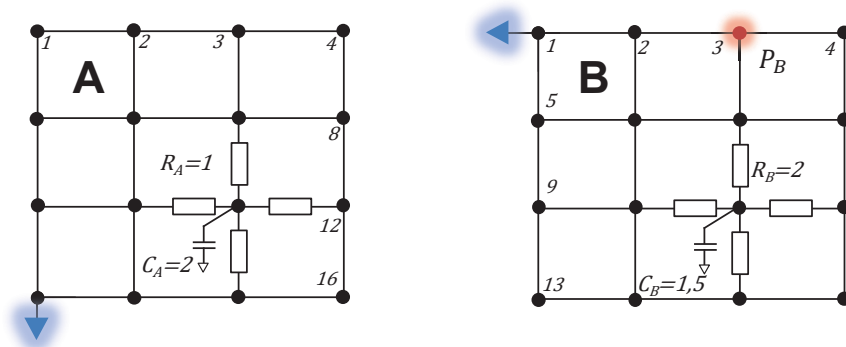


Abbildung 5.10: System 5 unterscheidet sich von System 4 durch eine Dirichlet-Randbedingung an Knoten  $B_1$ .

### 5.2.3.2 Testfall 1 - Kopplung genau *eines* Interfaceknotens

Für den ersten und einfachsten Testfall wird System 1 über genau *einen* Interface-Knoten gekoppelt, siehe Abbildung 5.11a, weshalb hier nur die Rechenoperationen aus Abschnitt 5.2.1.1 ausgeführt werden.

Die Impedanzen der Subsysteme  $\mathbf{Z}_{A,\text{ref}}$  und  $\mathbf{Z}_{B,\text{ref}}$  werden im Zeitbereich von 0 s bis 200 s mit einem konstanten Zeitschritt von 0,1 s (Kurzschreibweise: `lin(0:0,1:200)`) erstellt und sind in den Abbildungen 5.11b und 5.11c dargestellt.

Da die Eingangs-Zeitvektoren äquidistant und identisch sind, findet bei der Kopplung kein Genauigkeitsverlust durch Interpolation statt. Die in Abbildung 5.11d gepunktet dargestellten CoC-Impedanzen sind folglich annähernd identisch mit den Referenzimpedanzen. Es ergibt sich eine zu vernachlässigende maximale Abweichung von 0,08 %, siehe Abbildung 5.11e.

Es zeigt sich somit, dass das CoC-Verfahren bei Kopplung *eines* Knotens annähernd exakte Ergebnisse liefert.

Im folgenden Testfall wird die Komplexität durch Kopplung weiterer Knoten gesteigert.

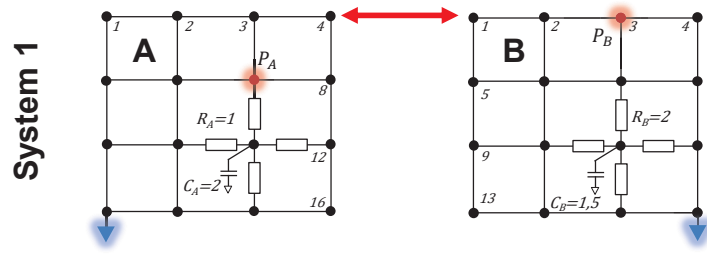
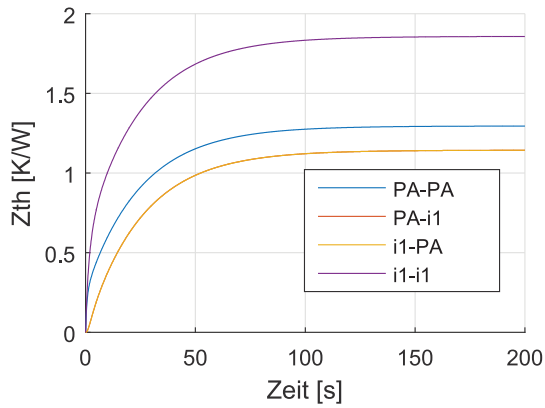
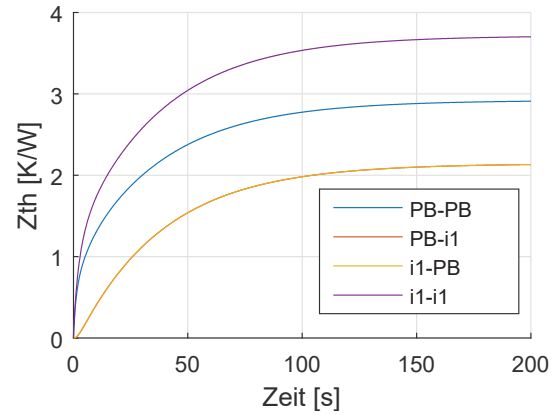
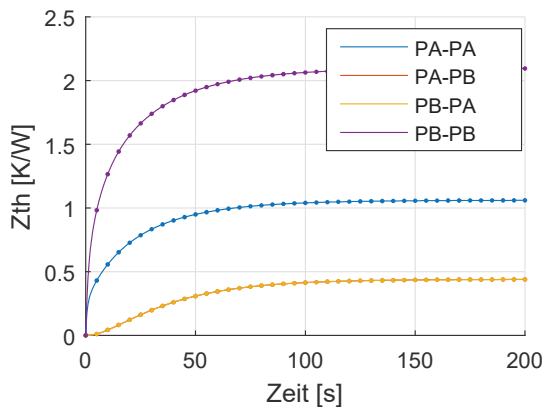
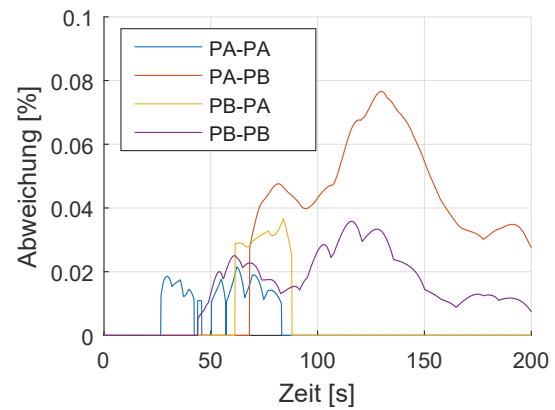
(a) Kopplung genau *eines* Knotens.(b)  $Z_{A,ref}$ , Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .(c)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .  $\epsilon_{max} = 0,08\%$ .

Abbildung 5.11: Testfall 1.

### 5.2.3.3 Testfall 2 - Kopplung von vier Interfaceknoten

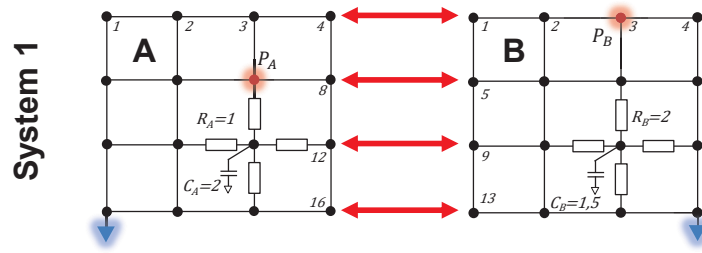
Testfall 2 unterscheidet sich von Testfall 1 dahingehend, dass nun jeweils alle vier Interface-Knoten gekoppelt werden, siehe Abbildung 5.12a. Aufgrund des iterativen Ansatzes des CoC-Verfahrens wird der Programmteil 5.2.1.2 dreimal durchlaufen. Es soll nun geprüft werden, ob diese Iterationen negative Auswirkungen auf die Genauigkeit des Verfahrens haben.

Die Vielzahl an Impedanzen der Subsysteme, in den Abbildungen 5.12b und 5.12c ergibt sich aus den Selbst- und Koppelimpedanzen der zusätzlichen Interface-Knoten (der Übersichtlichkeit halber wird in den ersten beiden Abbildungen auf die Legende verzichtet). Da nun alle Interfaceknoten an der Wärmeübertragung beteiligt sind, nimmt die Höhe der Koppelimpedanzen PB-PA bzw. PA-PB im Vergleich zu Testfall 1 zu, siehe Abbildung 5.12d.

Vergleicht man nun Abbildung 5.12e mit Testfall 1, ist kein Genauigkeitsverlust durch die Iterationen zu erkennen. Das CoC-Verfahren ist somit für die Kopplung über mehrere Interfaceknoten verifiziert.

Im folgenden Testfall soll untersucht werden, welche Auswirkungen es auf das Verfahren hat, wenn nicht alle Knotentemperaturen am Interface bekannt sind.





(a) Kopplung von vier Knoten.

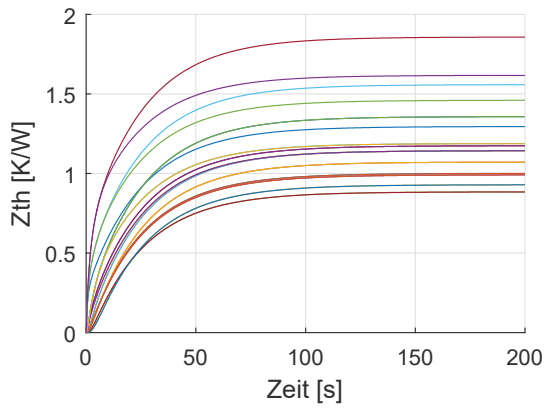
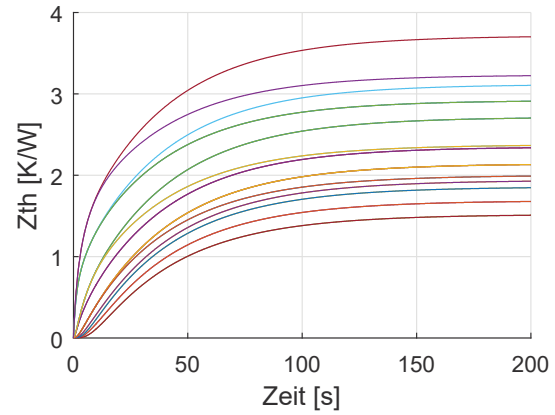
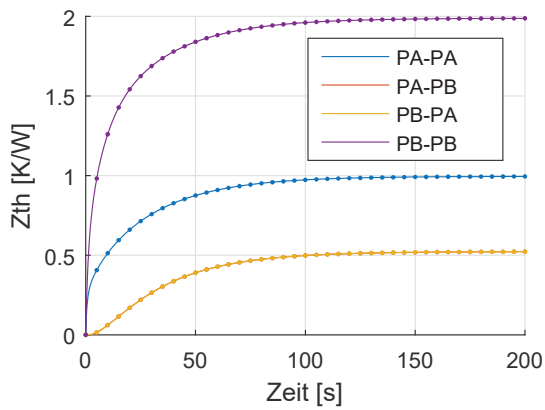
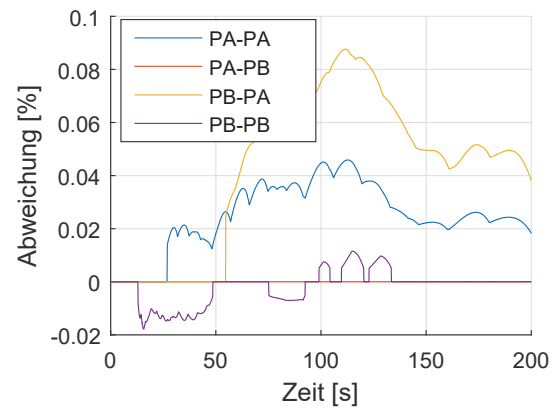
(b)  $Z_{A,ref}$ , Zeitschritt: lin(0:0,1:200).(c)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt: lin(0:0,1:200).(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Zeitschritt: lin(0:0,1:200).(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .  $\epsilon_{max} = 0,08\%$ .

Abbildung 5.12: Testfall 2.

#### 5.2.3.4 Testfall 3 - Arithmetische Mittelung der Interfaceknoten bei inhomogener Temperaturverteilung

Zur Kopplung des gesamten Interface ohne Genauigkeitsverlust müssen wie in Testfall 2 alle Impedanzen der Interfaceknoten bekannt sein. In der Praxis kann es vorkommen, dass

- erstens die Sprungantworten der einzelnen Knoten unbekannt sind, da z.B. kein Zugriff auf Knoten durch das verwendete Simulationstool besteht
- zweitens die Knoten sich nicht gegenseitig entsprechen, d.h. das Interface der Substruktur A anders diskretisiert ist, als das der Substruktur B oder
- drittens Rechenzeit eingespart werden soll, da ja zur Bestimmung der Impedanz der Interfaceknoten eine Simulation pro Knoten nötig ist.

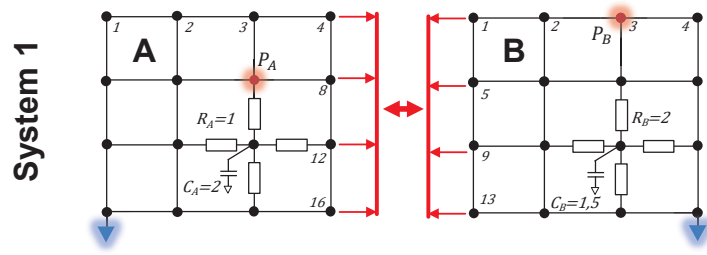
Eine zielführende Möglichkeit besteht nun darin, alle Interfaceknoten gleichzeitig mit einer konstanten Wärmestromdichte ( $P/n$  pro Knoten) zu beaufschlagen und nach Gleichung 3.26 die über das Interface gemittelte Sprungantwort bzw. Durchschnittstemperatur zur Erstellung der Selbst- und Koppelimpedanzen des Interface zu verwenden.

Mittels Testfall 3 soll nun evaluiert werden, welche Genauigkeit bei der beschriebenen Methodik im Vergleich zum Referenzsystem, bei dem alle vier Knoten separat gekoppelt werden, erreicht werden kann. Dazu werden die Sprungantworten aller 4 Knoten arithmetisch gemittelt und die Systeme anschließend über das CoC-Verfahren verbunden, siehe Abbildung 5.13a. Es ergeben sich die in den Abbildungen 5.13 gezeigten Impedanzen.

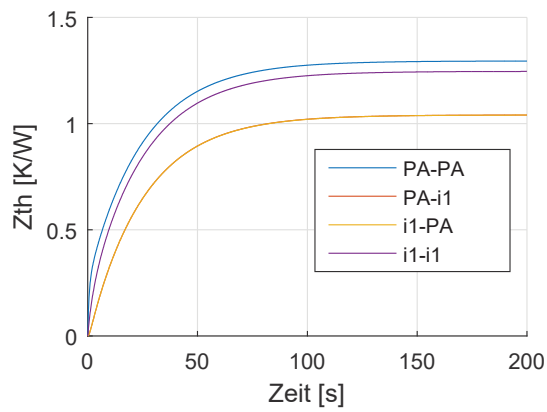
In Abbildung 5.13e zeigt sich eine doch beträchtliche Abweichung von bis zu 20 %. Dies kommt nicht unerwartet, wenn man sich noch einmal den Prozess zur Erstellung der gemittelten Eingangsimpedanzen vergegenwärtigt: Durch die Beaufschlagung des Interface mit einer konstanten Wärmestromdichte wird die Antwort auf ebendiese konstante Verteilung gebildet. Werden die Systeme jedoch real gekoppelt, fließt im gekoppelten System ein Wärmestrom über das Interface, der eine vollkommen andere örtliche Verteilung aufweisen kann. Wie in Abschnitt 3.3.2 erläutert, ist die Bedingung zur korrekten Temperaturberechnung, dass die Wärmestromdichteverteilung stets gleich bleiben muss. Ist dies nicht der Fall, können Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Interface-Temperatur entstehen, die als Koppelrandbedingungen in die Berechnung des gekoppelten Systems einfließen.

Der diskutierten Ungenauigkeiten treten jedoch nicht nur beim CoC-Verfahren auf, sondern entstehen bei allen Substrukturierungsverfahren, wenn nicht genügend Interfaceknoten vorhanden sind. Bei dem gewählten System 1 ist die Auswirkung auf die Kopplung recht hoch, da ähnliche thermische Widerstände zwischen den Knoten zu einer Wärmespreizung und somit Temperaturinhomogenitäten an der Grenzfläche führt.

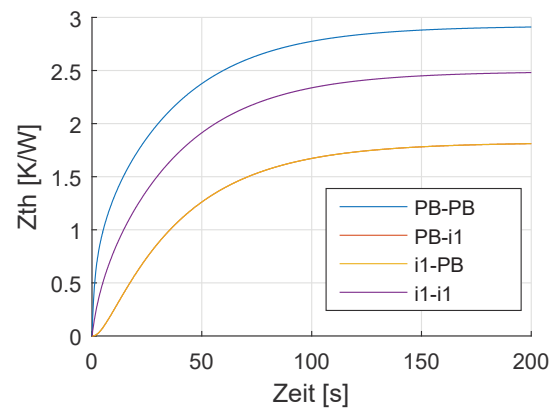
Dass eine homogenere Temperaturverteilung am Interface zu einem besseren Resultat beim CoC-Verfahren führt, soll mit folgendem Testfall gezeigt werden.



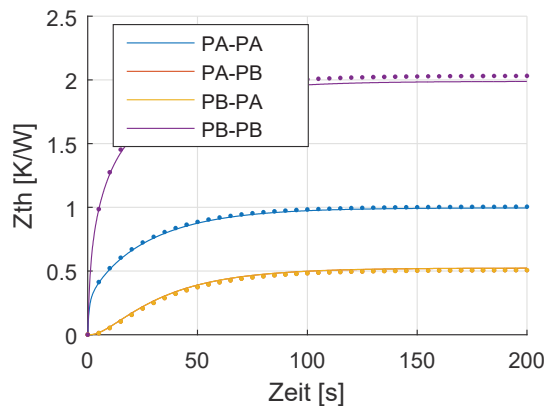
(a) Kopplung bei arithmetischer Mittelung der Interfaceknoten.



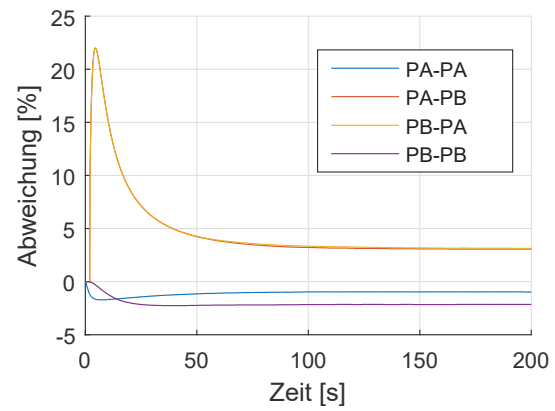
(b)  $Z_{A,\text{ref}}$  (Arithmetischer Mittelwert), Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(c)  $Z_{B,\text{ref}}$  (Arithmetischer Mittelwert), Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(d)  $Z_{\text{ref}}$  und  $Z_{\text{CoC}}$  im Vergleich. Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{\text{ref}}$  und  $Z_{\text{CoC}}$ .  $\epsilon_{\text{max}} = 20\%$ .

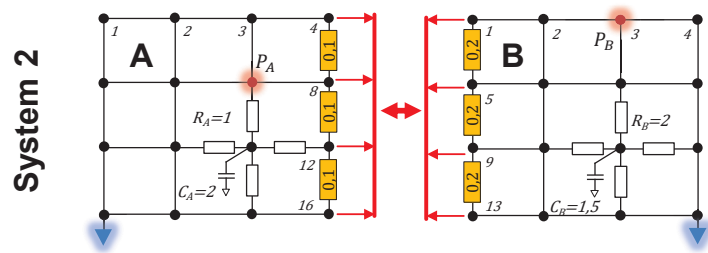
Abbildung 5.13: Testfall 3.

### 5.2.3.5 Testfall 4 - Arithmetische Mittelung der Interfaceknoten bei homogener Temperaturverteilung

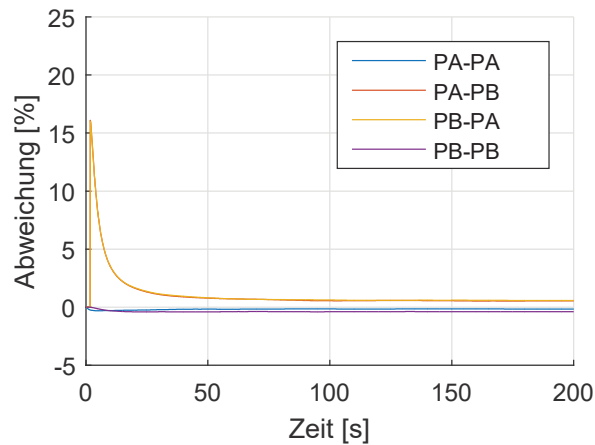
Wie beim vorherigen Testfall wird die Interfacetemperatur arithmetisch gemittelt. Der einzige Unterschied besteht nun darin, dass die thermischen Widerstände zwischen den Interfaceknoten um Faktor 10 reduziert sind. Wie sich die dadurch resultierende homogenere Temperaturverteilung auf die Genauigkeit des CoC-Verfahrens auswirkt, zeigt Abbildung 5.14b. Vor allem im stationären Bereich sinkt die Abweichung der Koppelempedanzen von ca. 5% bei Testfall 3 auf unter 1% bei Testfall 4.

Aus den letzten beiden Testfällen folgt, dass der Anwender nun zwei Möglichkeiten hat: Entweder er nimmt den Genauigkeitsverlust aus Testfall 3 in Kauf oder er unterteilt das Interface in kleinere Bereiche in denen eine homogene Temperatur zu erwarten ist.

Bisher wurden noch keine Effekte durch Interpolation betrachtet, da beide Eingangssysteme den identischen Zeitvektor hatten. Im Folgenden sollen daher die Auswirkungen durch verschiedene Interpolationsmethoden untersucht werden.



(a) Kopplung bei arithmetischer Mittelung bei homogener Temperaturverteilung am Interface.



(b) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{\text{ref}}$  und  $Z_{\text{CoC}}$ .  
 $\epsilon_{\text{max}} = 15\%$ .

Abbildung 5.14: Testfall 4.

#### 5.2.3.6 Testfall 5 - Lineare Interpolation

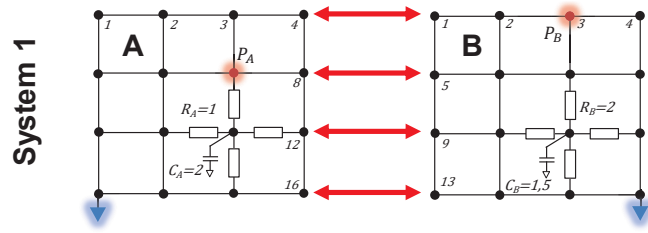
In Testfall 5 liegen die Eingangsimpedanzen in einer logarithmischen Zeitskalierung vor, siehe Abbildung 5.15b und 5.15c. Die Kurzschreibweise  $\log(-3:4:50)$  bedeutet, dass der Zeitvektor aus 50 Zeitschritten im Bereich zwischen  $10^{-3}\text{s}$  bis  $10^4\text{s}$  gebildet wird. Da die diskrete Faltung eine lineare Skalierung benötigt, werden die Impedanzen für jede einzelne Dekade linear interpoliert, aneinandergesetzt und in den Ausgabezeitschritt rückinterpoliert. Die Abweichung der CoC-Impedanzen bedingt durch die Interpolation liegt, wie in Abbildung 5.15e zu sehen, bei maximal 1,5 %.

Mit dem nun folgenden Testfall 6 soll gezeigt werden, wie hoch die Genauigkeit des CoC-Verfahrens bei kubischer Interpolation im Vergleich ausfällt.

#### 5.2.3.7 Testfall 6 - Kubische Interpolation

Hier wird statt der linearen Interpolation in Testfall 4 eine kubische Interpolation, wie in Abschnitt 3.3.4 dargelegt, durchgeführt. Die Abweichung der CoC-Impedanzen reduziert sich im Vergleich zur linearen Interpolation aus Testfall 5 um den Faktor 10 auf 0,1 %, siehe Abbildung 5.15g.

Die bereits diskutierte höhere Genauigkeit der kubischen Interpolation zeigt sich auch, wenn diese im CoC-Verfahren implementiert wird. Liegen dem Anwender Eingangsvektoren in logarithmischer Skalierung vor, ist folglich die kubische Interpolationsmethode der linearen vorzuziehen.



(a) Kopplung von vier Knoten.

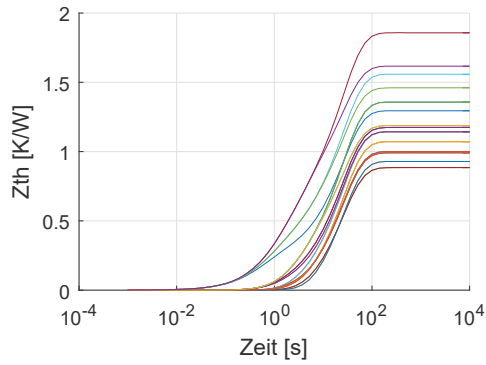
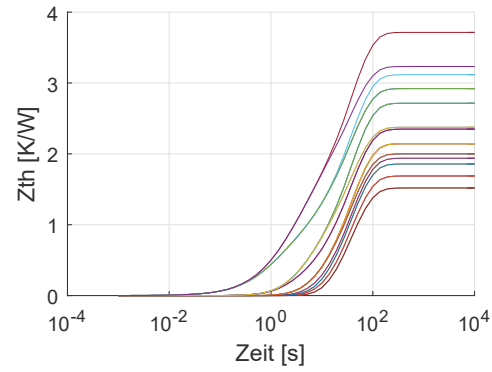
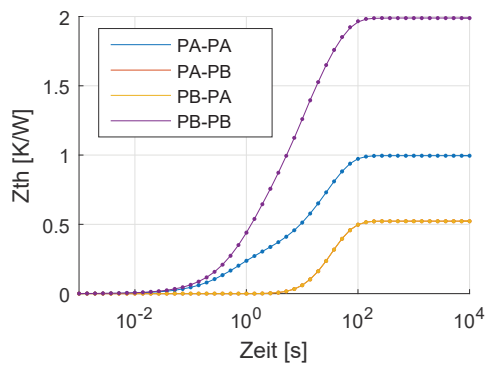
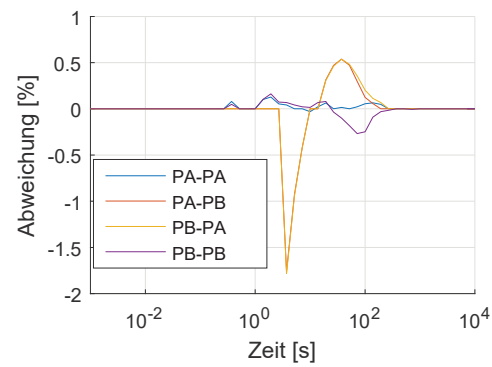
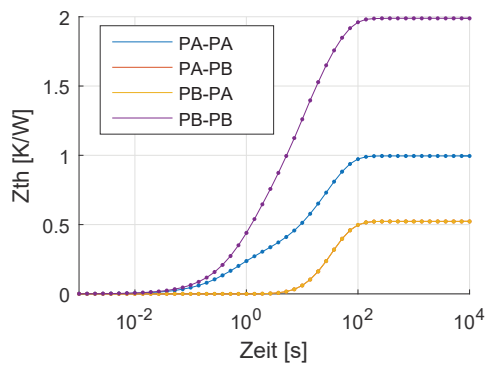
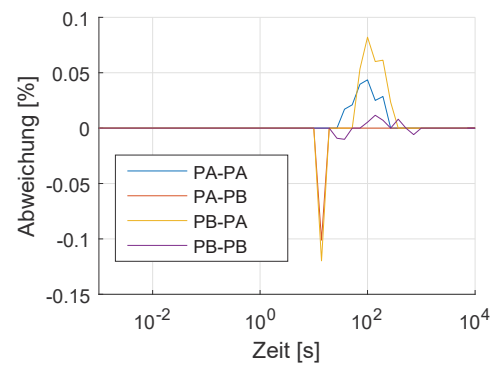
(b)  $Z_{A,ref}$ , Zeitschritt:  $\log(-3:4:50)$ .(c)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt:  $\log(-3:4:50)$ .(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Interpolationsmethode: **linear**. Zeitschritt:  $\log(-3:4:50)$ .(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .  $\epsilon_{max} = 1,5\%$ .(f)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Interpolationsmethode: **kubisch**. Zeitschritt:  $\log(-3:4:50)$ .(g) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .  $\epsilon_{max} = 0,1\%$ .

Abbildung 5.15: Testfälle 5 und 6.

### 5.2.3.8 Testfall 7 - Extrapolation bei stark abweichende Zeitkonstanten

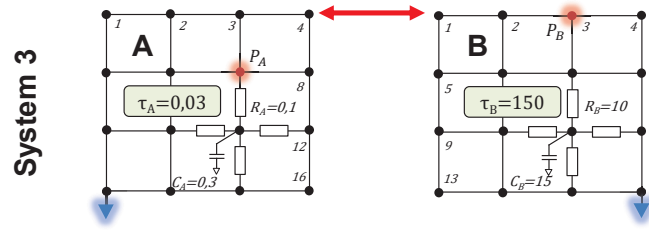
Bisher wurden zwei Systeme mit ähnlichen Zeitkonstanten gekoppelt. In der Praxis kann es jedoch vorkommen, dass sich die Zeitkonstanten maßgeblich unterscheiden. So ist zum Beispiel die Zeitkonstante eines Halbleiter-Chips um mehrere Größenordnungen geringer als die eines Kühlkörpers. Fehlen nun beispielsweise beim Kühlkörper Impedanzwerte für kleine Zeitbereiche, kann die Kopplung des Systems Chip-Kühlkörper, das beide Subsystemzeitbereiche vereint, nicht ohne weiteres stattfinden.

Im folgenden Testfall soll deswegen untersucht werden, wie es sich auf das CoC-Verfahren auswirkt, wenn fehlende Werte in den sich nicht überschneidenden Zeitbereichen der Eingangs- $Z_{th}$  extrapoliert werden.

Dem Testfall 7 wird daher System 3 mit stark abweichenden Zeitkonstanten zugrunde gelegt, weshalb sich die Eingangsimpedanzen von System A und B maßgeblich unterscheiden, vgl. Abbildung 5.16b und 5.16c. Zudem enthalten beide Zeitvektoren einen Bereich, in denen er sich nicht mit dem jeweils anderen überschneidet.

Die Impedanzen werden zunächst linear extrapoliert und danach kubisch wie beim vorherigen Testfall interpoliert.

In Abbildung 5.16d erkennt man am rechten Ende der  $Z_{CoC}$ -Kurven eine leichte Divergenz von den Referenzkurven. Die Abweichung von bis zu 5 %, siehe Abbildung 5.16f liegt daran, dass die Eingangsimpedanzen von System A 5.16b nicht vollständig konvergiert sind und durch die lineare Extrapolation die - wenn auch noch geringe - Steigung über den ursprünglichen Zeitbereich fortgesetzt wird. Ist also der Gradient der Eingangsimpedanzen wie in diesem Beispiel annähernd Null, ist es für die Kopplung via CoC-Verfahren vorteilhaft, die Impedanzen mit Null-Steigung fortzuschreiben, statt diese linear zu extrapolieren.



(a) Kopplung eines Knotens nach Extrapolation.

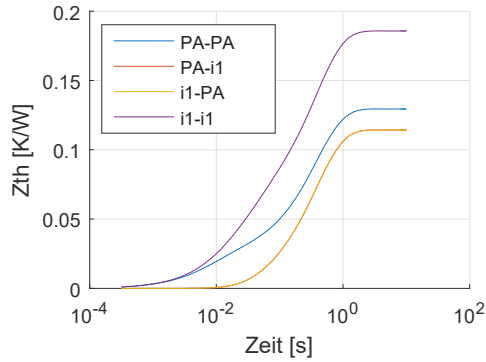
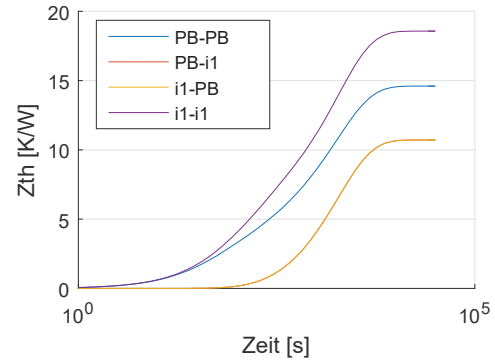
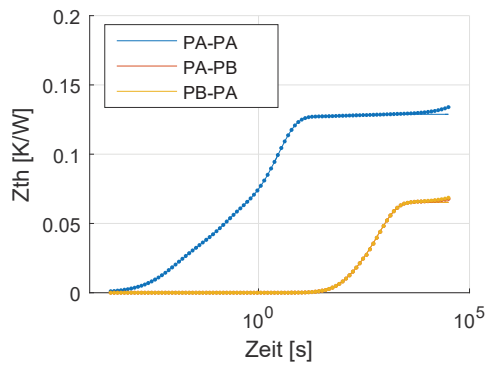
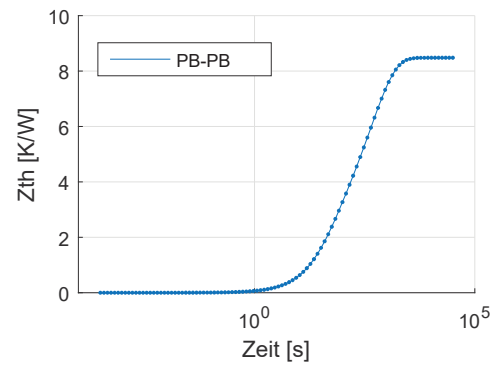
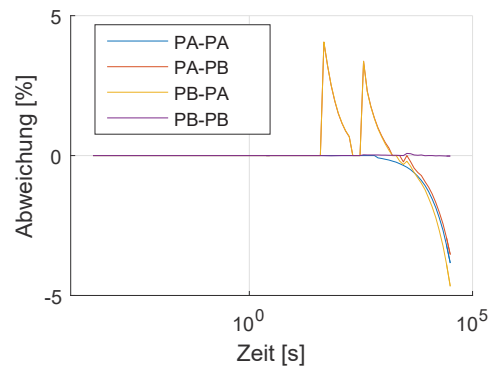
(b)  $Z_{A,ref}$ , Zeitschritt:  $\log(-3,5:0,5:50)$ .(c)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt:  $\log(0:4:50)$ .(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Interpolationsmethode: kubisch. Zeitschritt:  $\log(-3,5:4,5:50)$ .(e)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Interpolationsmethode: kubisch. Zeitschritt:  $\log(-3,5:4,5:50)$ .(f) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .  $\epsilon_{max} = 5\%$ .

Abbildung 5.16: Testfall 7.



### 5.2.3.9 Testfall 8 - Adiabates Subsystem

Mittels Testfall 8 soll untersucht werden, ob sich ein adiabates System über die CoC-Methode mit einem nicht adiabaten System koppeln lässt.

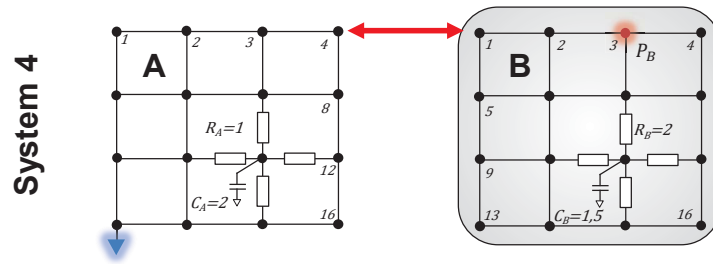
Ist beispielsweise ein Leistungshalbleiter auf einem wassergekühlten Kühlkörper montiert, wird annähernd der gesamte Wärmestrom über den Kühlkörper abgeführt. Das Subsystem Leistungshalbleiter wird in der Regel als adiabat angenommen, da es innerhalb des Subsystems keine Wärmesenke gibt.

In den bisher betrachteten Testfällen wurden stets Eingangsimpedanzen verwendet, für die aufgrund der Wärmesenke im jeweiligen Subsystem gilt

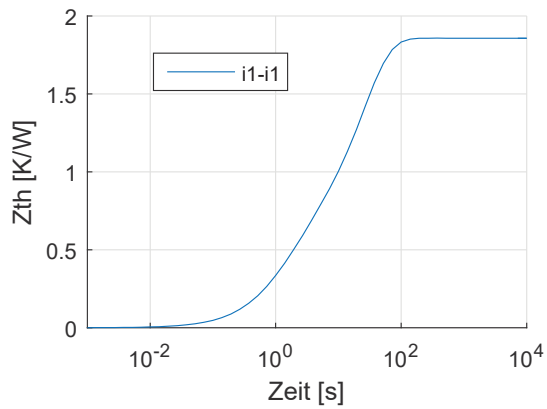
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{Z}_A(t)}{dt} \approx 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{Z}_B(t)}{dt} \approx 0. \quad (5.34)$$

Ist keine Wärmesenke im zu koppelnden Subsystem vorhanden, würde die Impedanz asymptotisch ansteigen. Substruktur B von System 4 ist ein adiabates System, was sich in den Impedanzverläufen zeigt, siehe Abbildung 5.17c.

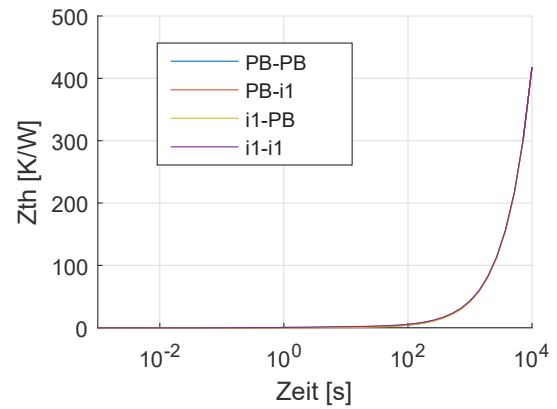
Die maximale Abweichung der CoC-Impedanzen beträgt lediglich 0,6 %, vgl. Abbildung 5.17e. Dies zeigt, dass die CoC-Methode unabhängig davon ist, unter welchen Randbedingungen die Impedanzen der Subsysteme gebildet werden.



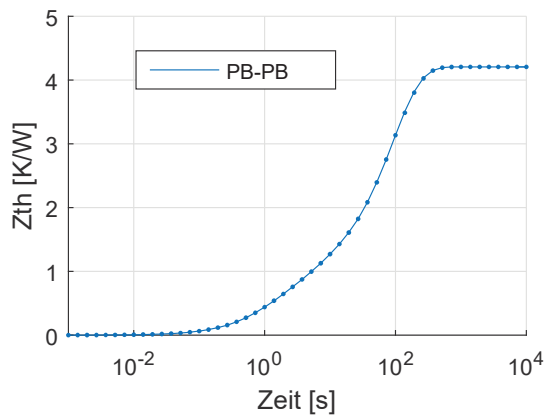
(a) Kopplung eines Knotens bei einem **adiabaten** Subsystem.



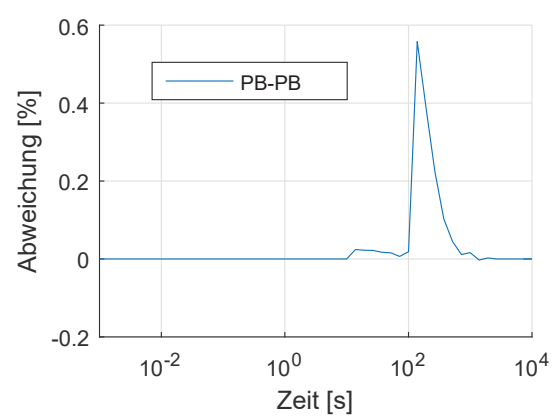
(b)  $Z_{A,ref}$ , Zeitschritt: log(-3:4:50).



(c)  $Z_{B,ref}$  (adiabat), Zeitschritt: log(-3:4:50).



(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Interpolationsmethode: kubisch. Zeitschritt: log(-3:4:50).



(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .  $\epsilon_{max} = 0,6\%$ .

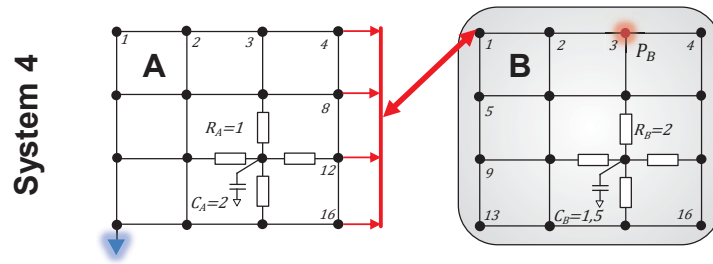
Abbildung 5.17: Testfall 8.

#### 5.2.3.10 Testfall 9 - Referenz für Testfälle 10 und 11

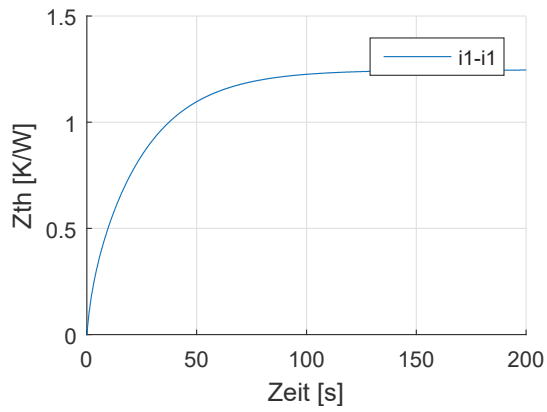
Im Folgenden soll untersucht werden, ob es eine weitere Möglichkeit gibt, die bereits erläuterte Abweichung bei der arithmetischen Mittelwertbildung der Interface-Knoten zu reduzieren. Referenz bildet System 4, bei dem die Knoten  $A_4$ ,  $A_8$ ,  $A_{12}$  und  $A_{16}$  mit  $B_1$  gekoppelt werden.

In Testfall 9 wird Subsystem A über arithmetische Mittelung aller 4 Interfaceknoten mit nur *einem* Interfaceknoten von Subsystem B verbunden, siehe Abbildung 5.18a. Die sich nach Abbildung 5.18e einstellende Abweichung, ergibt sich wie in Testfall 3 aus dem Grund, dass sich die Wärmestromdichteverteilung im gekoppelten System von der des ungekoppelten Systems unterscheidet.

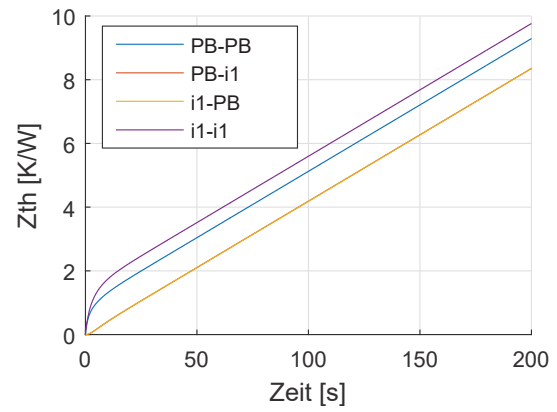
Wie diese Ungenauigkeit reduziert werden kann, wird im nächsten Testfall behandelt.



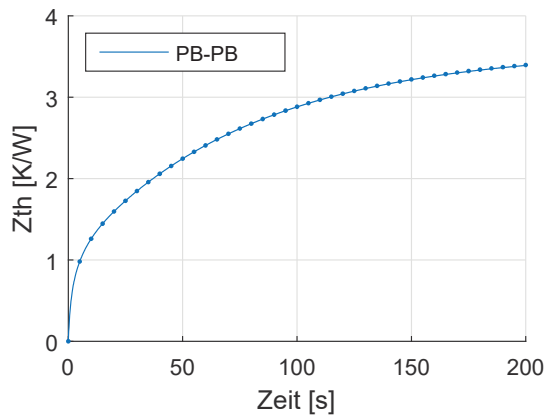
(a) Kopplung bei arithmetischer Mittelwertbildung von Interface A mit Knoten  $B_1$ .



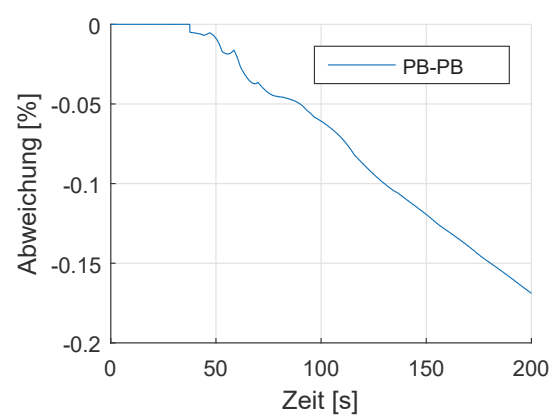
(b)  $Z_{A,ref}$  (Arithmetischer Mittelwert), Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(c)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .

Abbildung 5.18: Testfall 9.

### 5.2.3.11 Testfall 10 - Gewichtete Mittelung an *einem* Interface

Der Ansatz in diesem Testfall besteht nun darin, eine Form der Mittelwertbildung zu finden, bei der die Sprungantwort unabhängig von der Wärmestromdichteverteilung des Sprungs ist. Dazu wird eine gewichtete mittlere Impedanz eingeführt

$$Z_{\text{gew}}(n) = \frac{\sum_{i=1}^I \phi_{D,i}(n) Z_i(n)}{\sum_{i=1}^I \phi_{D,i}(n)}, \quad (5.35)$$

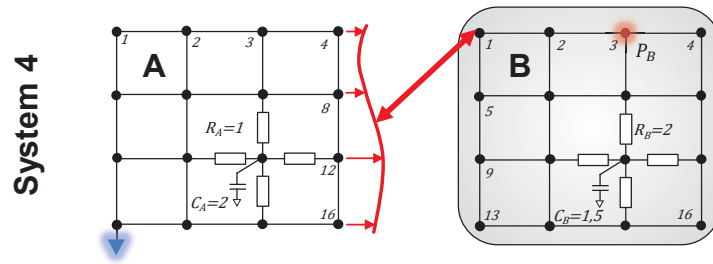
wobei  $\phi_{D,i}$  für den Gewichtungsfaktor am jeweiligen Interface-Knoten  $i$  zum Zeitschritt  $n$  steht. Die gewichtete Mittelwertbildung ist in Abbildung 5.19a dargestellt.

Die Gewichtungsfaktoren entsprechen der sich einstellende Wärmestromdichteverteilung normal zum Interface bei Applikation einer homogenen Dirichlet-Randbedingung am Interface. Anschaulich gesprochen, wird zunächst am gesamten Interface gleichzeitig ein Temperatursprung (z.B.  $10^\circ\text{C}$ ) appliziert. Die Wärmeströme  $\phi_{D,i}$ , die sich normal zum jeweiligen Interfaceknoten einstellen, bilden die Gewichtungsfaktoren. Nun wird das gesamte Interface gleichzeitig mit einem Leistungssprung beaufschlagt um die Impedanzen der einzelnen Interfaceknoten  $Z_i$  zu bestimmen. Mittels Gleichung 5.35 wird schließlich die gewichtete Interface-Impedanz  $Z_{\text{gew}}$  berechnet.

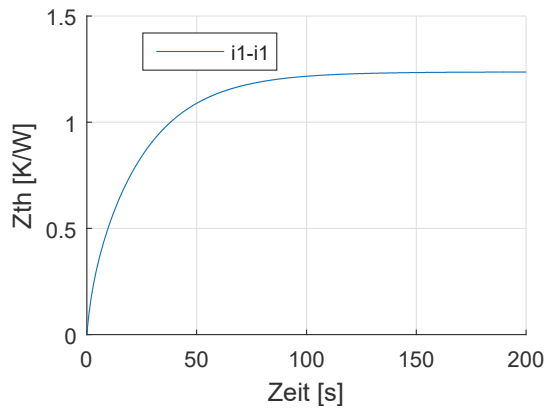
Die gewichtete Impedanz  $Z_{\text{gew}}$ , in diesem Fall die Selbst-Impedanz des Interface, bleibt stets konstant, unabhängig davon, wie der Wärmestrom über eben dieses Interface verteilt ist. Es zeigt sich, dass dadurch eine annähernd exakte Lösung via CoC-Verfahren erreicht wird, d.h. die Abweichung wird von 0,15 % bei Testfall 9 auf 0,05 % reduziert, siehe Abbildung 5.19e. Gleichzeitig ist es nun nicht mehr nötig, die Interfaceknoten einzeln mit einem Leistungssprung zu beaufschlagen, womit sich die Simulationszeit zur Berechnung der Interface-Impedanz um den Faktor  $I$  (Anzahl der Interfaceknoten) reduziert.

Die Testfälle 9 und 10 sind vergleichbar mit den Untersuchungen in der Publikation [33], welche die Kopplung eines kompakten „Komponenten-Modells“ (hier System B) mit einem detaillierten „Basis-Modell“ (hier System A) zum Thema hat. Darin wurde festgestellt, dass die Annahme einer homogenen Interface-Temperatur, wie in Testfall 9, zu größeren Abweichungen führe, als die Annahme einer homogenen Interface-Wärmestromdichte.

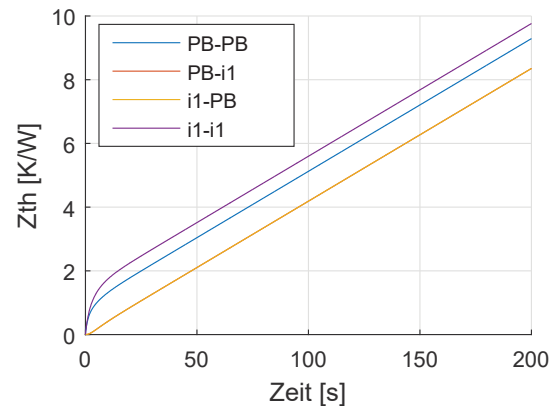
Testfall 10 zeigt somit, dass das CoC-Verfahren in Kombination mit den vorgestellten Gewichtungsfaktoren ein exaktes Verfahren zur Kopplung eines Kompaktmodells mit einem Basis-Modell darstellt.



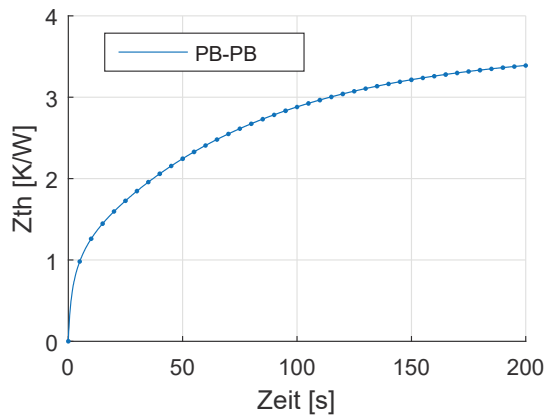
(a) Kopplung bei gewichteter Mittelwertbildung von Interface A mit Knoten  $B_1$ .



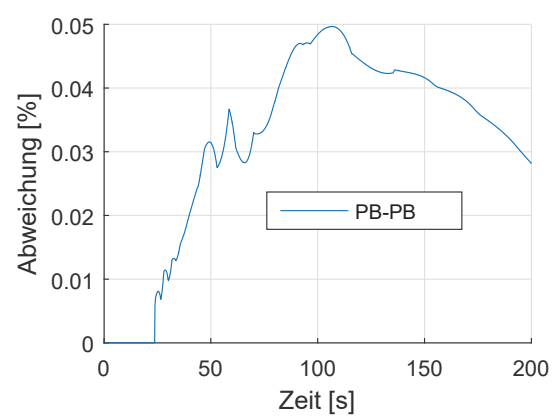
(b)  $Z_{A,ref}$  (Gewichteter Mittelwert), Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(c)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



(d)  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$  im Vergleich. Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .



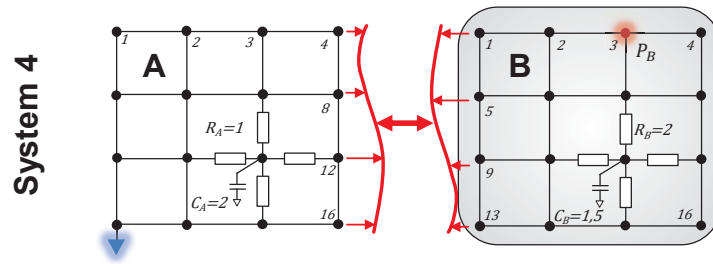
(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{ref}$  und  $Z_{CoC}$ .

Abbildung 5.19: Testfall 10.

#### 5.2.3.12 Testfall 11 - Gewichtete Mittelung an beiden Interfaces

Im nächsten Schritt wird untersucht, ob die Methode der gewichteten Mittelung aus Testfall 9 auch funktioniert, wenn zusätzlich das Interface der Substruktur mit Wärmequelle gemittelt wird. Referenz bildet System 4, bei dem die Knotenpaare  $A_4 - B_1$ ,  $A_8 - B_5$  und  $A_{12} - B_9$  und  $A_{16} - B_{13}$  gekoppelt werden.

Die Selbstimpedanzen beider Interfaces werden gemäß Gleichung 5.35 erzeugt. Die CoC-Impedanzen weisen damit einen maximalen Fehler von 1,5 % auf, siehe Abbildung 5.20e. Der Grund für die Abweichung ist in den Koppelimpedanzen zu suchen. Ändert sich die Wärmestromdichteverteilung am Interface, ist die Koppelimpedanz zwischen Interface und Wärmequelle nicht mehr gültig. Ob und wie diese Problematik umgangen werden kann, muss gegebenenfalls Gegenstand weiterer Forschungsarbeit sein.



(a) Kopplung eines Knotens.

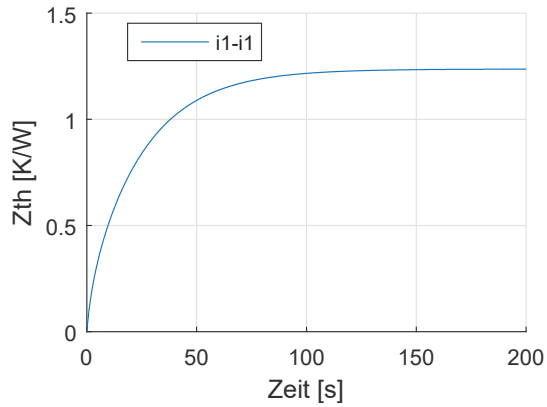
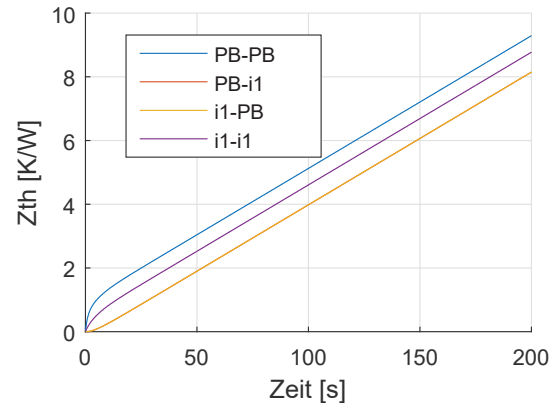
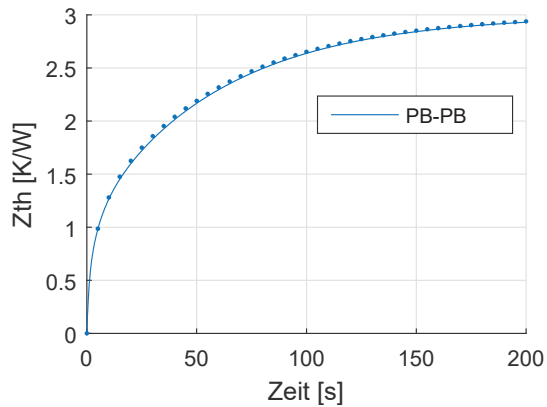
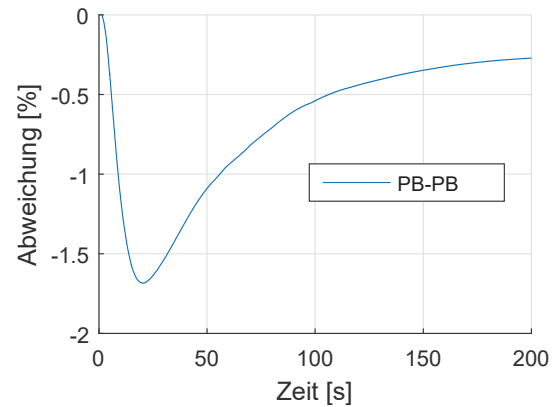
(b)  $Z_{A,\text{ref}}$  (Gewichteter Mittelwert), Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .(c)  $Z_{B,\text{ref}}$  (Gewichteter Mittelwert), Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .(d)  $Z_{\text{ref}}$  und  $Z_{\text{CoC}}$  im Vergleich. Zeitschritt:  $\text{lin}(0:0,1:200)$ .(e) Abweichung  $\epsilon(t)$  zwischen  $Z_{\text{ref}}$  und  $Z_{\text{CoC}}$ .

Abbildung 5.20: Testfall 11.



### 5.2.3.13 Testfall 12 - Kopplung über äquivalentes Cauer-Netz

In Testfall 12 wird das hier entwickelte CoC-Verfahren mit einer an [28] angelehnten Vorgehensweise zur Kopplung von Substrukturen via Äquivalenztransformation verglichen.

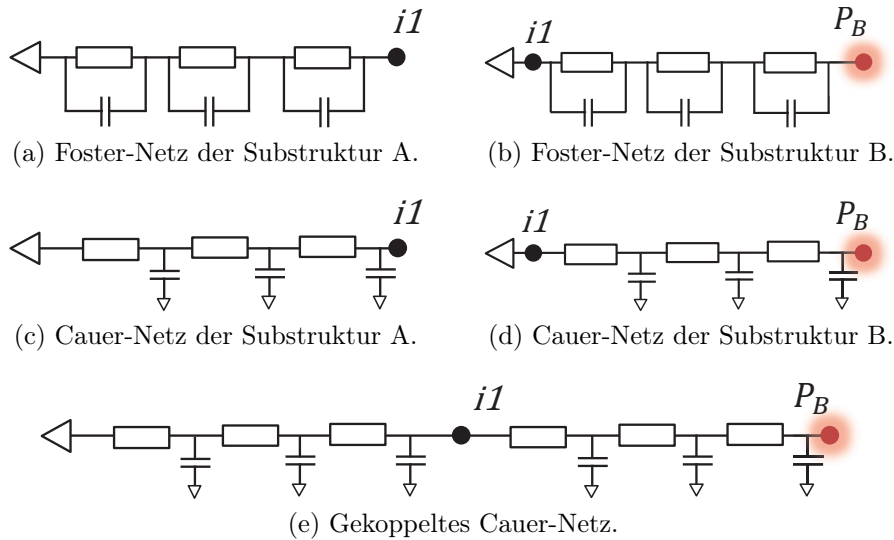
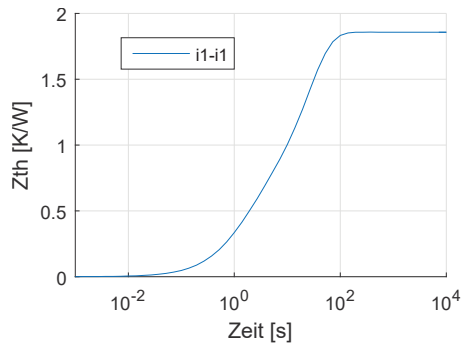
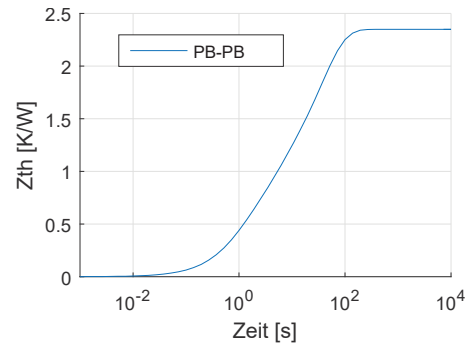
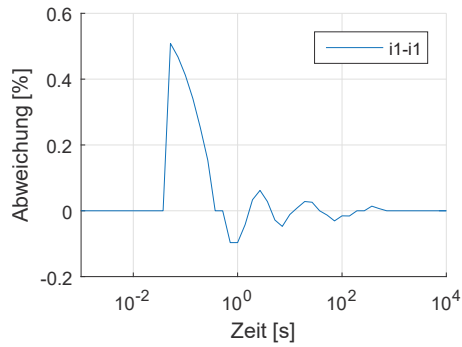


Abbildung 5.21: Foster-Fit und Foster-Cauer-Transformation der Substruktur-Referenzimpedanzen aus System 5 und anschließende Kopplung der Cauer-Netze.

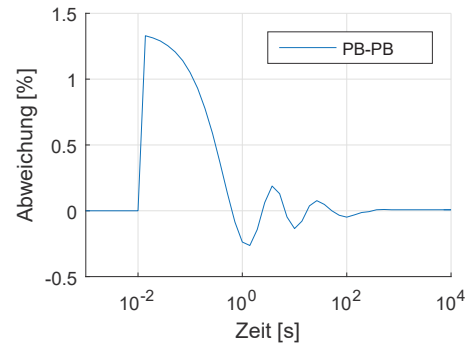
Ausgangspunkt bilden die Referenzimpedanzen der Substrukturen des System 5, siehe Abbildung 5.10. Zunächst wird jeweils ein dreigliedriges Foster-Netz an die Selbstimpedanzen des Interface-Knotens  $A_4$  und der Wärmequelle  $B_3$  gefittet, (Abb. 5.21a, Abb. 5.21b). Die Netze werden anschließend Cauer-transformiert (Abb. 5.21c, Abb. 5.21d) und schließlich gekoppelt (Abb. 5.21e). Die entsprechenden Netzwerk-Parameter sind in Tabelle 5.1 zu finden. Es ist zu beachten, dass das Cauer-Netz nur dann das Referenzmodell nachbildet, wenn der gesamte Wärmestrom, wie im vorliegenden Fall, über das Interface fließt.

Abbildung 5.22 zeigt die sich über die beschriebenen Schritte ergebenden Abweichungen. Im gekoppelten System zeigt sich eine maximale Abweichung von 8 %, die um den Faktor 10 über der Abweichung bei Kopplung via CoC-Verfahren liegt, siehe Testfall 8, Abbildung 5.17e.

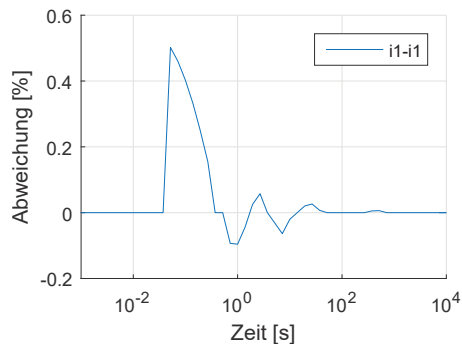
Somit wurde nachgewiesen, dass das CoC-Verfahren mit der direkten Kopplung zeitdiskreter Impedanzen genauer ist als der Ansatz, die Kopplung über äquivalente Netzwerke durchzuführen.

(a)  $Z_{A,ref}$ , Zeitschritt:  $\log(-3,4,50)$ .(b)  $Z_{B,ref}$ , Zeitschritt:  $\log(-3,4,50)$ .

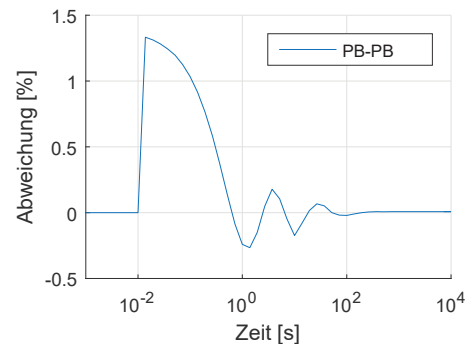
(c) Abweichung des Foster-Netzes.



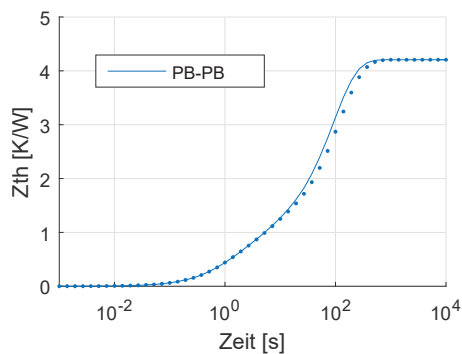
(d) Abweichung des Foster-Netzes.



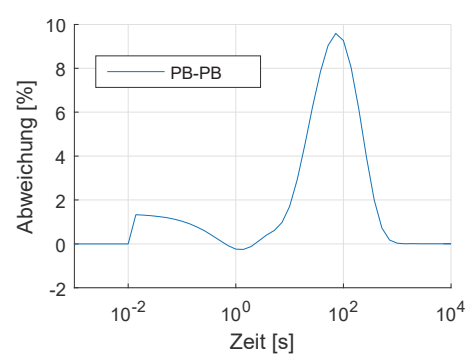
(e) Abweichung des Cauer-Netzes.



(f) Abweichung des Cauer-Netzes.



(g) Abweichung des gekoppelten Systems.



(h) Abweichung des gekoppelten Systems.

Abbildung 5.22: Testfall 12.

Tabelle 5.1: Parameter eines äquivalenten Cauer-Netzwerks resultierend aus einer Foster-Cauer-Transformation. Die Foster-Parameter ergeben sich durch entsprechendes Fitting an die  $Z_{\text{th}}$ -Kurven aus Testfall 12.

Parameter	Foster A	Foster B	Cauer A	Cauer B
R1 [K/W]	0,425	0,407	0,52255	0,70927
C1 [J/K]	5,277	2,062	2,0124	1,5207
R2 [K/W]	0,171	1,364	0,38657	0,6538
C2 [J/K]	3,884	27,596	5,4011	6,7421
R3 [K/W]	1,260	0,575	0,9479	0,98487
C3 [J/K]	20,000	7,329	18,1177	28,5308

#### 5.2.3.14 Abschließende Bewertung des CoC-Verfahrens

In diesem Abschnitt sollen nochmals die Erkenntnisse aus den diskutierten Testfällen zusammengefasst werden. Das CoC-Verfahren weist folgende Eigenschaften auf:

- Hohe Genauigkeit bei direkter Kopplung genau *eines* Knoten.
- Gleichbleibend hohe Genauigkeit bei Kopplung mehrerer Interfaceknoten.
- Wird eine mittlere Impedanz über das gesamte Interface gebildet, ist mit einem Genauigkeitsverlust zu rechnen, der sich nach der Inhomogenität der Temperaturverteilung bemisst.
- Je besser die Wärmeleitfähigkeit, bzw. je homogener die Temperaturverteilung im Bereich des Interfaces ist, desto genauer ist die mittlere Impedanz.
- Die kubische Interpolation weist bei Eingangsimpedanzen in einer logarithmischen Skala eine deutlich höhere Genauigkeit als eine lineare Interpolation auf und wird deswegen beim CoC-Verfahren standardmäßig verwendet.
- Bei annähernd konvergierten Eingangsimpedanzen ist es sinnvoller, statt einer linearen Extrapolation die Impedanzen dahingehend anzupassen, dass diese mit einer Steigung von Null fortgesetzt werden.
- Das CoC-Verfahren funktioniert unabhängig davon, unter welchen Randbedingungen die Subsystemimpedanzen erstellt werden. So können auch Impedanzen, die aus adiabaten Subsystemen hervorgehen, gekoppelt werden.
- Ein Subsystem mit einem Interfaceknoten kann mit einem zweiten Subsystem mit mehreren Interfaceknoten via CoC-Verfahren exakt gekoppelt werden, auch wenn die Impedanzen der einzelnen Knoten nicht bekannt sind. Dazu muss die Impedanz des Interfaces als gewichteter Mittelwert vorliegen.
- Das CoC-Verfahren ist genauer als die Kopplung äquivalenter Netzwerke mit den dafür notwendigen Äquivalenztransformationen.

Eine Übersicht aller Testfälle ist in Tabelle A.2 im Anhang dargestellt.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde das CoC-Verfahren mathematisch hergeleitet und anhand akademischer Testfälle untersucht sowie validiert. Im folgenden Kapitel wird das CoC-Verfahren auf ein Praxisbeispiel angewandt.



## 6 Substrukturierung und Kopplung eines Invertermoduls

In diesem Kapitel wird die CoC-Methode aus Kapitel 5.2 zur Erstellung eines thermischen Kompaktmodells eines Wechselrichtermoduls (engl. Inverter) angewandt. Dazu wird zunächst ein substrukturiertes FE-Modell in ANSYS aufgebaut und die Impedanzen der Substrukturen abgeleitet. Die Kopplung wird dann mittels des CoC-Verfahrens durchgeführt und anschließend mit einer FE-Simulation eines transienten Lastprofils verglichen.

Das Wechselrichtermodul bildet eine der wesentlichen Hauptkomponenten der Leistungselektronik im Antrieb eines Elektrofahrzeugs. Es wandelt die von der Batterie ausgehende Gleichspannung in Wechselspannung für die elektrische Maschine (EM) um. Die Ausgangsleistung der betrachteten EM liegt bei ca. 100 kW, bei einer Eingangsspannung  $V_{DC}$  zwischen 100 und 450 V. Die Leistungselektronik wird über ein Wasser-Glykol-Gemisch gekühlt. Bei 85°C Kühlwassertemperatur liegt der maximal zulässige Pulswechselrichter-Strom  $I_{RMS}$  bei ca. 400 A. Das Wechselrichtermodul besitzt als wesentliche Komponenten eine B6-Brücke und einen Folienkondensator als Zwischenkreiskondensator. Jeweils zwei parallelgeschaltete High-Side und Low-Side IGBTs (engl. Insulated-Gate Bipolar Transistor) bilden mit je einer Freilaufdiode eine der drei Halbbrücken, wie im Schaltplan in Abbildung 6.1 dargestellt ist.

Abbildung 6.2a zeigt den mechanischen Aufbau des Wechselrichter-Moduls anhand eines CAD-Modells, das als Basis für die thermische FE-Simulation verwendet wird. Die

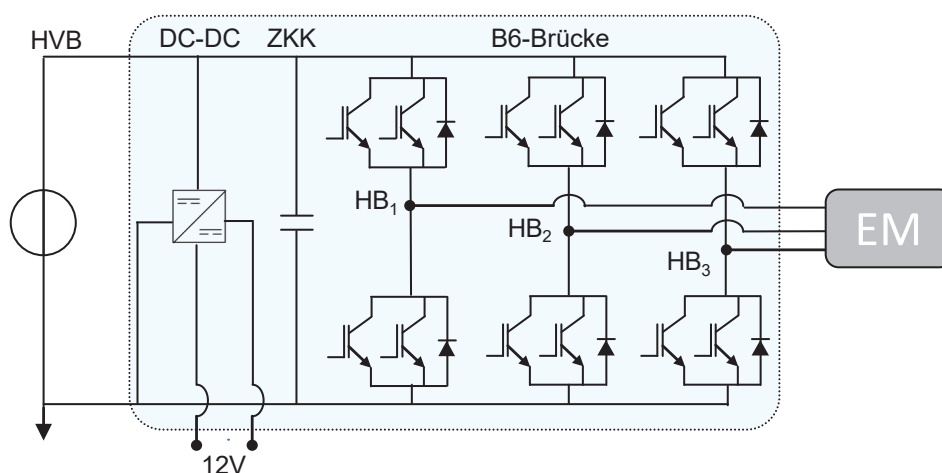
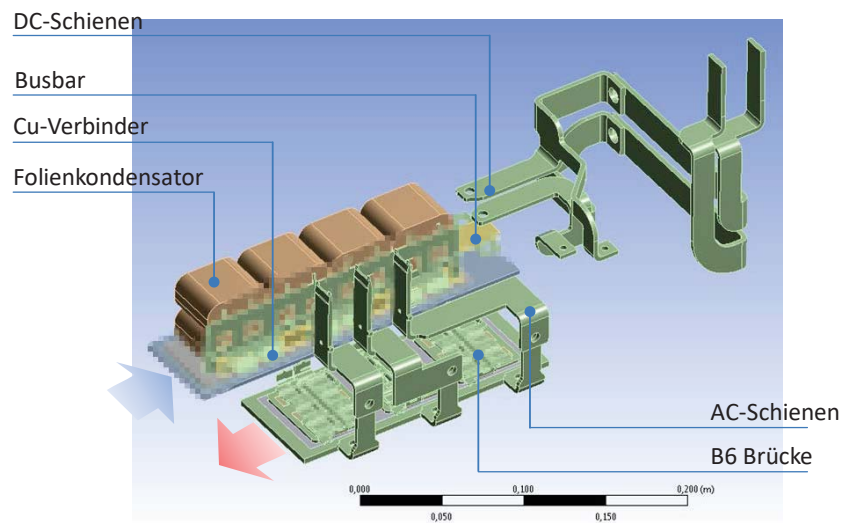
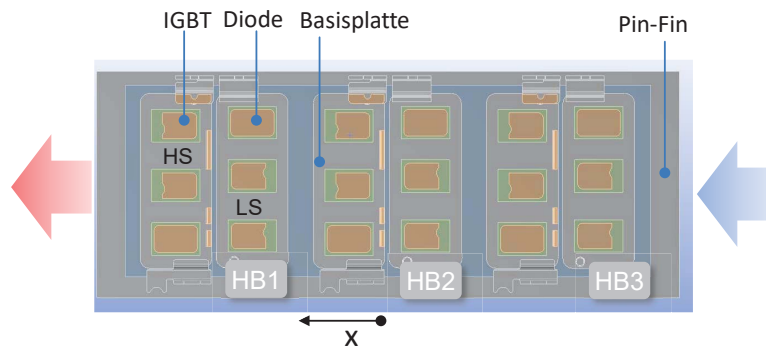


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des elektrischen Antriebsstrangs für Hybrid- und Elektrofahrzeuge. HVB: Hochvoltbatterie, ZKK: Zwischenkreiskondensator (hier Folienkondensator), EM: Elektrische Maschine, HB: Halbbrücke



(a) Entkoppeltes Invertermodul.



(b) Draufsicht auf B6-Brücke. Nicht dargestellt sind die Verbindungselemente zwischen den Leistungshalbleitern. HS: High Side, LS: Low Side, HB: Halbbrücke

Abbildung 6.2: Mechanischer Aufbau des Wechselrichter-Moduls, bestehend aus den Systemen Wechselrichter, Folienkondensator und Stromschienen.

Teilsysteme B6-Brücke, Folienkondensator (FoKo) und Stromschienen (AC- und DC-Schienen) sind bereits entkoppelt dargestellt und bilden die jeweiligen Substrukturen im Rahmen des CoC-Verfahrens. Das Kühlmedium strömt zunächst unter der Kühlplatte des Folienkondensators entlang und wird danach durch den Pin-Fin-Kühler in x-Richtung an der Unterseite der B6-Brücke geführt. Die Grundplatten sind dabei so in Kühlmittelstromrichtung angeordnet, dass sich eine möglichst homogene Temperaturverteilung ausbildet. Somit werden thermo-mechanische Beanspruchung resultierend aus unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Materialien reduziert. Inverter und Folienkondensator sind über flexible Stromleiter elektrisch verbunden. Zwei längere Kupfer-Stromschienen bilden im Modell die Zuleitungen von Batterie zum Folienkondensator. Drei kürzere Stromschienen verbinden den Inverter mit der elektrischen Maschine.

Die Leistungshalbleiter der B6-Brücken sind in einer sogenannten Sandwich-Bauweise zwischen Grundplatte und Stromschienen angeordnet. Ziel ist eine gute beidseitige Ent-

wärmung. An der Unterseite ist der Chip auf eine Grundplatte aus Kupfer gelötet, die mit dem Pin-Fin-Kühlkörper verbunden ist, über welchen der größte Teil der Verlustwärme ins Kühlmedium abgeführt wird. Auf der Oberseite des Chips sind ebenso Kupfer-Clips angelötet, welche über ihre Wärmekapazität zudem die Wärme, die bei kurzzeitigen Lastspitzen anfällt, zwischenspeichern können.

## 6.1 Beschreibung des FE-Modells

Das in Abbildungen 6.2 gezeigte CAD-Modell bildet die Ausgangsgeometrie für die FE-Simulation in ANSYS-Mechanical. Vereinfachend wird der Pin-Fin-Kühler nicht im Detail, sondern als unstrukturierte Platte ohne Pins aber mit angepasster Randbedingung modelliert. Analog zur Modellierung der Batteriezellen wird den Wicklungen des Folienkondensators ein homogenes Ersatzmaterial zugewiesen, das die thermischen Eigenschaften des komplexen inneren Aufbaus bestmöglich repräsentiert.

Der Wärmeübergangskoeffizient des Pin-Fin-Kühlers und die Temperaturerhöhung des Fluids an der Unterseite des Wechselrichtermoduls wird für den entsprechenden Lastfall mittels CFD-Simulation an einem detaillierten Kühlkörpermodell ermittelt. Ein abgeschätzter mittlerer Wärmeübergangskoeffizient von  $30.000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$  an der Kühlkörperoberfläche findet in das Simulationsmodell als Robinsche Randbedingung Eingang. Die zugehörige Fluidtemperatur wird mittels einer linearen Funktion in Abhängigkeit der x-Koordinate approximiert. Da der Folienkondensator weitaus weniger Wärme dissipiert, trägt dieser nur unwesentlich zur Erhöhung der Fluidtemperatur bei, so dass diese als konstant angesehen werden kann. Der Kühlkörper des Folienkondensators weist einen 10-fach geringeren Wärmeübergangskoeffizienten von  $3.000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$  als der vorher angesprochene Pin-Fin-Kühler auf. Die luftseitige Anbindung der Inverterkomponenten über freie Konvektion wird durch einen konstanten Wärmeübergangskoeffizienten von  $5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$  an das Gehäuseinnere bei  $115^\circ\text{C}$  modelliert.

Volumetrische Verlustleistungsquellen bilden die Verluste aufgrund von Rippelströmen in den Wickeln des Folienkondensators, ohmsche Verluste in den Cu-Verbindern, der Busbar und den AC- und DC-Stromschienen sowie Schalt- und Durchlassverluste in den IGBTs und Dioden. Das Rechengebiet wird mit ca. 1.500.000 Knoten, wie in Abbildung 6.3 zu sehen, unstrukturiert vernetzt. Der Einfluss der Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden, da bei wassergekühlten Systemen der konvektive Wärmeübergang an das Fluid dominiert.



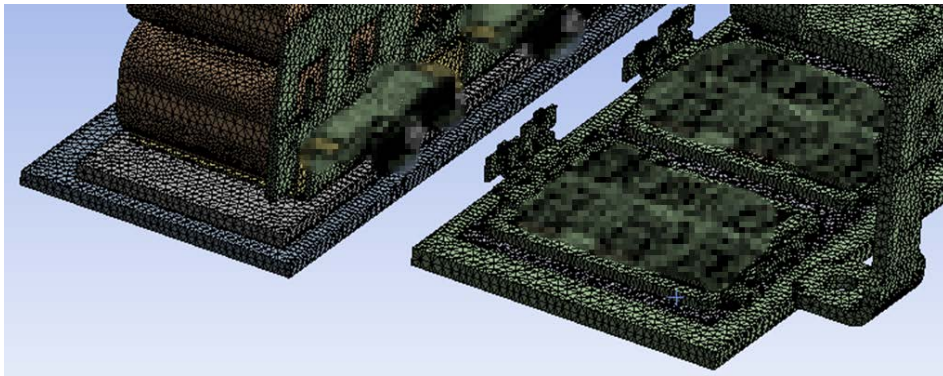


Abbildung 6.3: Ausschnitt des unstrukturierten Netzes mit ca. 1.500.000 Knoten.

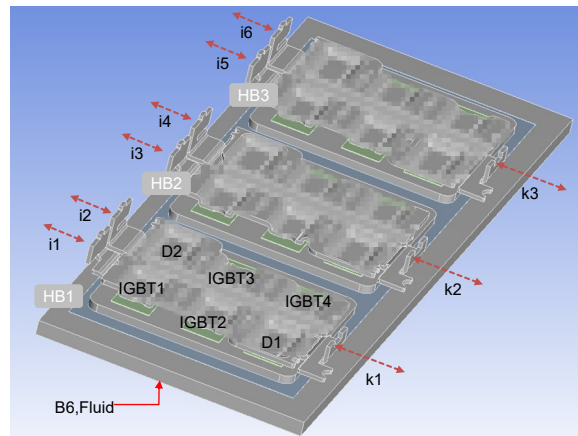
## 6.2 Erstellen der Substrukturimpedanzen

Zur Substrukturierung des Invertermoduls wird das FE-Modell aus vorherigem Abschnitt inklusive Vernetzungs- und Analyseinstellungen dupliziert. Gemäß Abbildung 6.4 werden die nicht zur jeweiligen Substruktur gehörigen Komponenten deaktiviert. Der Pin-Fin-Kühler wird in x-Richtung in drei gleiche Teile als grobe Diskretisierung unterteilt, sodass jeder Halbbrücke eine mittlere Fluidtemperatur zugeordnet werden kann. Die Ausgabezeitschritte werden gleichmäßig bzgl. einer logarithmischen Basis von 0,1 s bis 1.000 s verteilt.

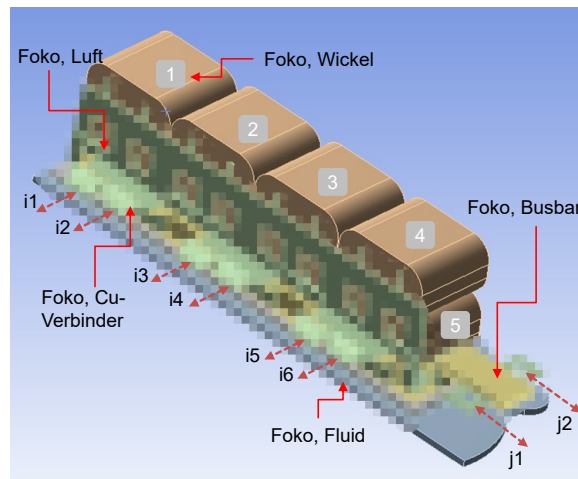
Neben den volumetrischen Verlustquellen wird an jedem Interface eine Oberflächenwärmequelle appliziert. Die Interfaceflächen entsprechen in diesem Fall den physikalischen Koppelflächen. Mit Hilfe einer Parameterstudie wird sukzessive jede unabhängige verlustbehaftete Komponente mit einem Leistungssprung und jede der drei Halbbrücken kühlmittelseitig mit einem Temperatursprung beaufschlagt. Da sich die Verluste gleicher Chips auf einer Halbbrücke aufgrund gleichen Betriebszustands und ähnlicher Kühlwassertemperatur kaum unterscheiden, werden pro Halbbrücke die IGBTs und Dioden zu je einer Verlustquelle zusammengefasst. Ebenso werden jeweils die Cu-Verbinder sowie die 8 Wickel des Folienkondensators als eine einzige, gemeinsame Verlustquelle mit homogener Wärmestromdichteverteilung dargestellt.

Als Monitorpunkte fungieren die Temperatur des jeweils mittig auf den Chips befindlichen Knotens sowie die mittleren volumetrischen Wickel-, Stromschienen- und Cu-Verbindertemperaturen.

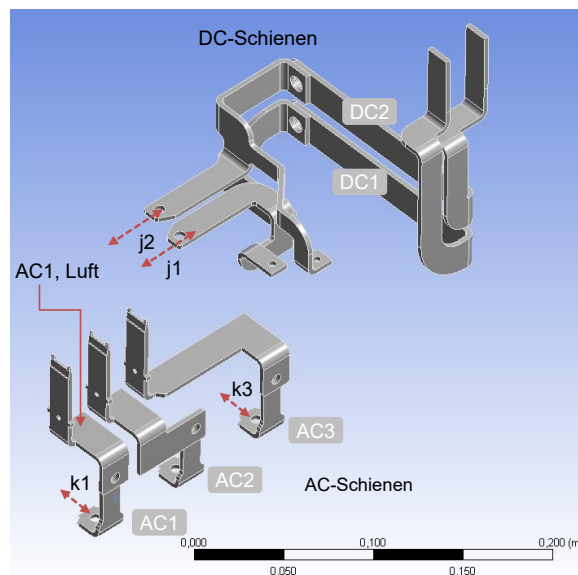
Da bei ANSYS-Workbench der über das Volumen bzw. Flächen gemittelte Temperaturverlauf nicht direkt ausgegeben werden kann, wurde zu diesem Zweck ein Skript in APDL (Ansys Programming Design Language) programmiert und im Postprocessing implementiert. Für die zu ermittelnden Impedanzen müssen zunächst äquivalente Komponenten erstellt werden, wobei das Skript automatisch zwischen Komponenten des Typs Knoten, Volumen und Flächen unterscheidet. Den Hauptteil bilden drei Do-Schleifen, in denen die mittleren Temperaturen zum jeweiligen Zeitschritt berechnet werden. Im Fall einer Flächenkomponente sieht der Programmablauf beispielsweise folgendermaßen aus:



(a) Substruktur Inverter. HB: Halbbrücke



(b) Substruktur Folienkondensator



(c) Substruktur Stromschienen

Abbildung 6.4: Substrukturierung und Konvention zur Bezeichnung der  $Z_{th}$ -Kurven.

```

do,Komp,1,Anz_Komponenten
  do,Zeit,1,Anz_Zeitschritte
    do,Knoten,1,Anz_Knoten
      X(Knoten) = Temperatur(Knoten_Next)*Fläche(Knoten_Next)
    enddo
    TemperaturFeld(Zeit,Komp) = Summe(X(Knoten)) / Summe(Fläche_Knoten)
  enddo
enddo.

```

Die Matrix *TemperaturFeld* beinhaltet den transienten Temperaturverlauf aller vorher definierten Komponenten bei Applikation eines Leistungssprungs in genau *einer* Komponente, wobei die Komponententemperaturen jeweils über die Anzahl ihrer Knoten gemittelt werden. Für jede Berechnung innerhalb der Parameterstudie unabhängige Verlustquelle wird die Matrix *TemperaturFeld* in eine Output-Datei exportiert und für das CoC-Verfahren durch ein entsprechendes Matlab-Skript ausgelesen und zur Impedanz-Substruktur-Matrix normiert.

### 6.3 Verifikation und Ergebnisse

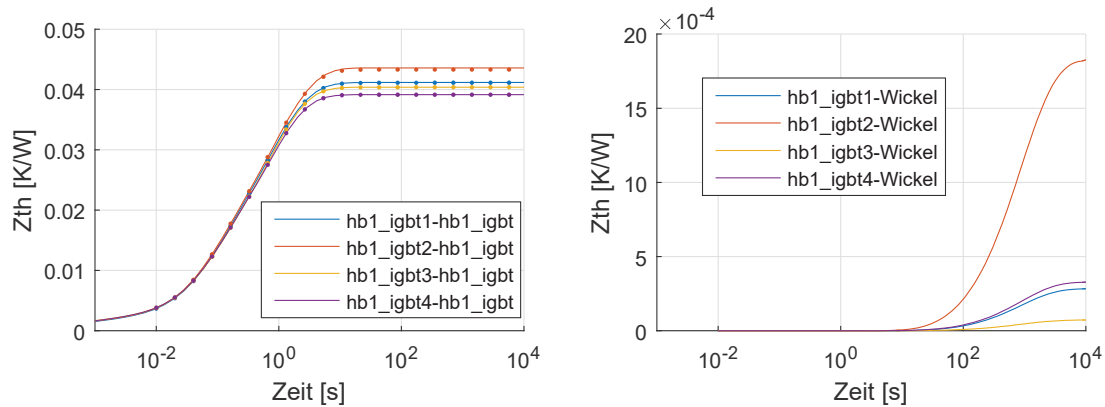
Die Kopplung der Subsysteme wird nun nach dem in Kapitel 5.2 beschriebenen CoC-Verfahren mittels kubischer Interpolation durchgeführt. Abbildung 6.5a zeigt, dass die Selbstimpedanzen der Leistungshalbleiter auf Halbbrücke 1 geringfügig unter denen des ungekoppelten Systems liegen. Dieser Unterschied liegt an der zusätzlichen Wärmeabfuhr über den Folienkondensator und die Stromschienen. Betrachtet man die Koppelimpedanzen zwischen B6-Brücke und Folienkondensator in Abbildung 6.5b und 6.5c, zeigt sich, dass sich diese im Bereich von wenigen  $\frac{\text{mK}}{\text{W}}$  bewegen. Da im Lastfall jedoch beträchtliche Verlustleistungen in den Leistungshalbleitern auftreten können, ist die thermische Kopplung zur korrekten Beschreibung des Temperaturfelds dennoch keinesfalls zu vernachlässigen.

Zur Validierung des gekoppelten Kompaktmodells wird dieses mit einem Lastprofil beaufschlagt. Der Lastverlauf wird dabei über eine Dauer von 600 s gemittelt, sodass dieser einem Leistungssprung entspricht. Abbildung 6.6a zeigt, dass der weitaus höchste Teil der insgesamt 3,46 kW Verlustleistung innerhalb der B6-Brücke entsteht.

Zunächst wird die Fluid-Temperatur an der Oberfläche des zum Inverter gehörigen Pin-Fin-Kühlers mittels CFD bei den spezifizierten Verlusten simuliert, um diese dann als Randbedingung in das Kompaktmodell zu übertragen. Für die Fluidtemperatur ergibt sich folgender Zusammenhang

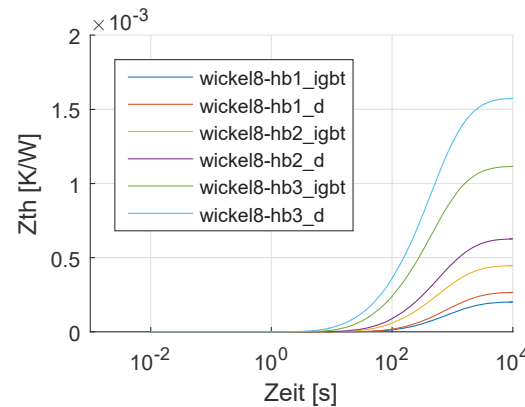
$$T_f(x, t) = T_{f,0} + (a + b \cdot x)(1 - e^{-t/7\text{sec}}) \quad (6.1)$$

mit  $a = 3,41^\circ\text{C}$  und  $b = -42,08^\circ\text{C}/\text{m}$ . Für jede Halbbrücke wird im Kompaktmodell  $T_f(x, t)$  arithmetisch über die Länge der Substruktur-Grundplatte  $x$  gemittelt, siehe Abbildung 6.6b.



(a) Selbst-Impedanzen der IGBTs auf Halbbrücke Nr.1 (HB1) im gekoppelten (gepunktet) und ungekoppelten System (durchgezogene Linie).

(b) Koppelimpedanzen der IGBTs auf Halbbrücke Nr.1 (HB1) im gekoppelten System bei Verlustleistung in den Wickeln des Folienkondensators.



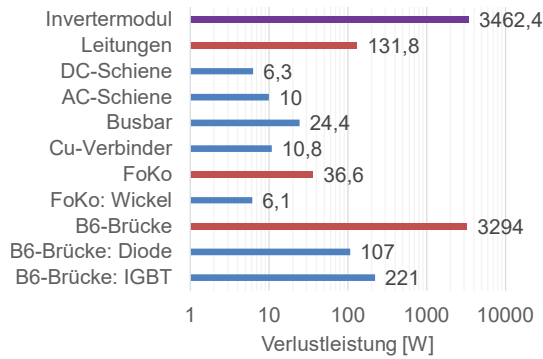
(c) Koppelimpedanzen der Wicklung Nr. 8 im gekoppelten System bei Verlustleistung in den Leistungshalbleitern der B6-Brücke.

Abbildung 6.5: Analyse der Kopplung zwischen den Substrukturen.

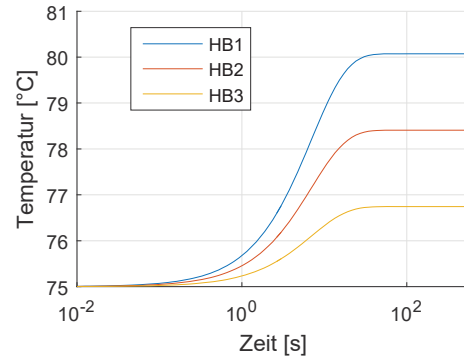
Die Umgebungstemperatur im Gehäuse beträgt  $115^{\circ}\text{C}$ , die Kühlwassereintrittstemperatur zum Startzeitpunkt  $T_{f,0}=75^{\circ}\text{C}$ .

Bild 6.7a zeigt das Temperaturfeld des gekoppelten Systems gemäß der FE-Simulation nach 600 s. Vergleicht man nun das Kompaktmodell mit der FE-Simulation an den spezifizierten Monitorpunkten, zeigt sich ein annähernd identischer transienter Temperaturverlauf, siehe Abbildung 6.7b. Die Abweichungen zwischen FEM und TCM betragen unter 5%, wie in Abbildung 6.7c zu erkennen ist. Die Rechendauer reduziert sich im Vergleich zur FEM von ca. zwei Stunden auf weniger als eine Sekunde.

Die Applikation des CoC-Verfahrens auf das Invertermodul hat somit gezeigt, dass das CoC-Verfahren auch bei komplexen Systemen zur Kopplung der reduzierten Substrukturmatrizen annähernd exakt ist. Der Ansatz der arithmetischen Mittelung der Interface-Knoten erweist sich als praktikable Vereinfachung, die in diesem Applika-



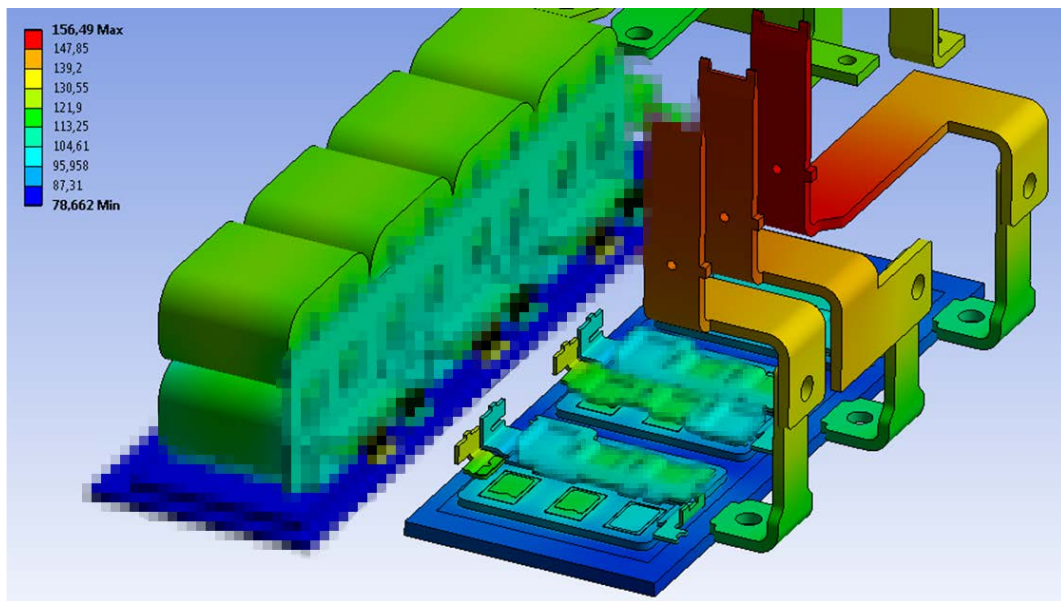
(a) Verlustleistung am Invertermodul.



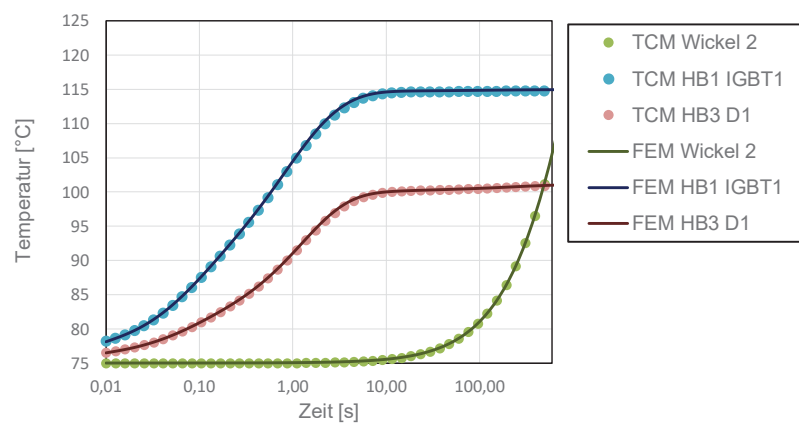
(b) Transiente Fluidtemperatur am Pin-Fin-Kühler gemittelt über die Länge der jeweiligen Halbbrücke (HB) nach CFD-Simulation.

Abbildung 6.6: Verlustleistung und Fluidtemperaturen, die sich bei einem typischen Fahrzyklus ergeben.

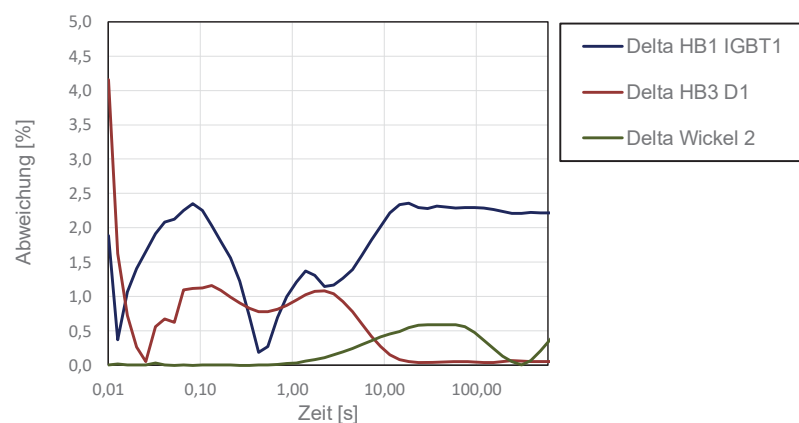
tionsbeispiel zu keinem Genauigkeitsverlust führte. Die Berechnung des transienten Temperaturverlaufs der Inverterkomponenten bei beliebig komplexen Lastprofilen ist mit dem erstellten Kompaktmodell höchst effizient, da sich die benötigte Rechenzeit auf wenige Sekunden beschränkt. Des Weiteren können nun Substrukturen bei Designänderungen separat reduziert und mit den bereits bestehenden Substrukturen erneut gekoppelt werden. Somit bietet sich dem Anwender durch das CoC-Verfahren in Kombination mit dem in dieser Arbeit entwickelten Computer-Programm eine flexible, genaue und recheneffiziente Methode zur Ordnungsreduktion und Substrukturierung komplexer thermischer Systeme.



(a) Temperaturfeld des gekoppelten Systems nach 600s.



(b) Vergleich zwischen FEM (durchgezogene Linie) und TCM (gepunktet).



(c) Prozentuale Abweichung zwischen FEM und TCM.

Abbildung 6.7: Ergebnisse der FEM Simulation und des mittels des CoC-Verfahrens erstellten Kompaktmodells.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Hauptteil der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Methoden der Kompaktmodellerstellung diskutiert. Kompaktmodelle basierend auf thermischen Impedanzen bilden eine Möglichkeit den Temperaturverlauf eines linearen Systems unter variablen Randbedingungen exakt nachzubilden. Dieses Verhalten wurde genauer betrachtet und methodisch ausgearbeitet. Anhand eines Akkupacks wurde die Kompaktmodellerstellung exemplarisch angewandt. Dazu wurden zunächst die thermophysikalischen Stoffeigenschaften einer Lithium-Ionen-Zelle ermittelt, um das Zellmodell in das Gesamtmodell des Akkupacks einzubinden. Das CFD-basierte detaillierte Modell wurde durch „Einfrieren“ der Strömungsparameter um einen spezifizierten Betriebspunkt linearisiert, um danach das Kompaktmodell zu erstellen. Die Rechenzeit, die zur Simulation einer konstanten Last benötigt wird, sinkt auf unter eine Sekunde, während die Abweichung zwischen Kompaktmodell und nichtlinearer CFD an den relevanten Auswertepunkten (Zelloberflächentemperatur und Referenzsensor) maximal 1,5 K bzw. 5% in Bezug auf den betrachteten Temperaturhub beträgt. Das Kompaktmodell wurde in ein echtzeitfähiges thermoelektrisches Modell transformiert und mittels eines Lastprofils unter variierenden Umgebungsrandbedingungen mit Messdaten verglichen. Hier zeigten sich Abweichungen zwischen TCM und Messung von 15%. Mittels des TCMs wurde ein relevanter Temperaturgradient der Zellkerntemperaturen über das Lastprofil nachgewiesen, der zur Debalancierung der Batteriezellen führen kann. Die Erhöhung der Genauigkeit bei der Ermittlung der thermischen Zellparameter sowie die Erweiterung des Verlustmodells um den Ladeprozess wird Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

Bisher wurde eine Simulation bei definiertem Laststrom durchgeführt. Jedoch ist der im Akkupack anfallende Laststrom im Betrieb eines Elektrowerkzeugs von mehreren Faktoren, wie im Folgenden gezeigt wird, abhängig. Der jeweilige Anwendungsfall, z.B. das Eindrehen einer Schraube, bestimmt das dafür erforderliche Drehmoment, das der Motor an die Antriebswelle übertragen muss. Das Drehmoment ist proportional zum Motorstrom, welcher im Normalbetrieb dem Batteriestrom entspricht. Werden dabei die für den Akkupack geltenden Stromgrenzen überschritten, wird die Leistung mittels Pulsweitenmodulation reduziert, womit der Batteriestrom sinkt (engl. Derating). Durch die Motorinduktivität wird der Motorstrom hingegen aufrechterhalten, wodurch das Drehmoment, bei sinkender Drehzahl, gehalten wird. Des Weiteren sinkt die Batteriespannung mit dem SoC, wodurch die Drehzahl bei konstanter Last abnimmt. D.h. bei Entleerung eines Batteriepacks durch Eindrehen von Schrauben gleichen Typs, wird die erforderliche Dauer zum Eindrehen einer Schraube mit Sinken der Batteriespannung zunehmen. Um die Erwärmung eines Akkupacks unter realen Lastfällen zu simulieren, müssen diese exemplarisch erläuterten Wirkzusammenhänge mit berücksichtigt werden. Dazu kann das Akku-TCM zu einem thermisch, mechanischen und elektrischen



Modell des gesamten Antriebsstrangs des jeweiligen Elektrowerkzeugs erweitert werden. Ein weiteres Einsatzgebiet des Kompaktmodells besteht in der Implementierung im Microcontroller des Elektronikmoduls, sodass während des Betriebs kritische Systemtemperaturen des Elektrowerkzeugs überwacht werden können.

Im zweiten Hauptteil der vorliegenden Arbeit wurde eine neue Methode zur Substrukturierung entwickelt. Sind technische Systeme modular aufgebaut und von einer hohen Komplexität, die einen entsprechenden Detaillierungsgrad in der thermischen Modellierung erfordert, bietet es sich an das Ursprungssystem zu substrukturieren, und die Substrukturen zu reduzieren. Die gängigen Methoden zur Reduktion und zur Rück-Kopplung in ein reduziertes Gesamtsystem wurden hinsichtlich ihrer Stärken und Schwächen bewertet. Mit der Entwicklung des CoC-Verfahrens, ist es in dieser Arbeit gelungen, die Vorteile der Substrukturierung und der oben beschriebenen Kompaktmodellbildung zu vereinen. Es zeigt sich eine hohe Genauigkeit, da durch die zeitdiskrete Faltung, keine Abweichung durch ein ansonsten notwendiges Fitting an äquivalente Netzwerke entsteht. Das CoC-Verfahren wurde an einem Invertermodul exemplarisch angewandt, nachdem es in die Substrukturen B6-Brücke, Folienkondensator und Stromschienen aufgeteilt wurde. Ein Kompaktmodell des Invertermoduls wurde mit Hilfe der Erkenntnisse der allgemeinen Randbedingungen aus dem ersten Hauptteil erstellt und validiert, wobei eine Genauigkeit von 5% erreicht werden konnte.

Zukünftig kann das Prinzip der Substrukturierung und Kopplung mittels CoC-Verfahren beispielsweise auch auf den kompletten Antriebsstrang eines akkubetriebenen Elektrowerkzeugs, welches sich aus den Einzelkomponenten Batterie, Elektronik, Motor, Kupplung und Getriebe zusammensetzt, übertragen werden. Weist das Interface für die Kopplung eine signifikante Inhomogenität bezüglich Temperatur oder Wärmestromdichte auf, muss dieses entsprechend fein diskretisiert werden. Hier kann zukünftig überprüft werden, ob es alternativ möglich ist, z.B. durch eine Form der gewichteten Mittelung die Genauigkeit zu erhöhen, was für den Fall einer Substruktur ohne Wärmequellen in dieser Arbeit bereits nachgewiesen wurde. Ein weiteres Ziel kann es sein, Kriterien zu finden anhand derer der Genauigkeitsverlust im gekoppelten System bei Verzicht auf feinere Diskretisierung bereits im Voraus abgeschätzt werden kann.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass thermische Kompaktmodelle auf Impedanzen basierend, ein hohes Potential bieten, um komplexe Lastkollektive innerhalb kürzester Zeit annähernd exakt zu simulieren. Zudem wurde dargestellt, dass diese Kompaktmodelle hoch flexibel bzgl. der Randbedingungen und ihrer Anwendungsgebiete sind. Mit Hilfe des entwickelten CoC-Verfahrens erschließt sich dem Nutzer die Möglichkeit, komplexe thermische Systeme in „handlichere“ Teilsysteme zu separieren und diese zu einem genauen und kompakten Modell des Gesamtsystems zurückzuführen.

# Literatur

- [1] ABB: Thermal design and temperature ratings of IGBT modules, Application Note, 2012.
- [2] ANSYS Theory Reference, Release 5.6, ANSYS, Inc., 1999.
- [3] J. Altet & A. Rubio: Thermal Testing of Integrated Circuits, Springer US, 2002.
- [4] P. Amiribavandpour, W. Shen & A. Kapoor: Development of Thermal-Electrochemical Model for Lithium Ion 18650 Battery Packs in Electric Vehicles, IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), S. 1–5, 2013.
- [5] A. S. Bahman, K. Ma & F. Blaabjerg: Thermal impedance model of high power IGBT modules considering heat coupling effects, International Electronics and Application Conference and Exposition (PEAC), S. 1382–1387, 2014.
- [6] T. Bechtold, E. B. Rudnyi & J. G. Korvink: Fast Simulation of Electro-thermal MEMS: Efficient Dynamic Compact Models, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [7] T. Bechtold, E. B. Rudnyi, M. Graf, A. Hierlemann & J. G. Korvink: Connecting heat transfer macromodels for MEMS array structures, Journal of Micromechanics and Microengineering, Bd. 15, Nr. 6, S. 1205–1214, 2005.
- [8] P. Böckh & T. Wetzel: Wärmeübertragung: Grundlagen und Praxis, Springer Vieweg, 2011.
- [9] T. Bonin: Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen, Utz Verlag GmbH, 2015.
- [10] D. Botto, S. Zucca, M. M. Gola, E. Troncarelli & G. Pasquero: Component modes synthesis applied to a thermal transient analysis of a turbine disc, Proceedings of the 3rd Worldwide Aerospace Conference and Technology Showcase, 2002.
- [11] O. Capron, A. Samba, N. Omar, P. Van den Bossche & J. Van Mierlo: Thermal Behaviour Investigation of a Large and High Power Lithium Iron Phosphate Cylindrical Cell, Energies, Bd. 8, S. 26, 2015.
- [12] R. Courant & D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, Bd. 2, Wiley-VCH, 1953.

- [13] Datasheet of a Power MOSFET, IRFB7437PbF, Rev. 2, International Rectifier, 2015.
- [14] C. T. Dia, E. Monier-Vinard, N. Laraqi, V. Bissuel & O. Daniel: Dynamic sub-compact model and global compact model reduction for multichip components, 19th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (THERMINIC), S. 158–163, 2013.
- [15] S. J. Drake, D. A. Wetz, J. K. Ostanek, S. P. Miller, J. M. Heinzl & A. Jain: Measurement of anisotropic thermophysical properties of cylindrical Li-ion cells, Journal of Power Sources, Bd. 252, S. 298–304, 2014.
- [16] U. Drofenik, D. Cottet, A. Musing, J.-M. Meyer & J. W. Kolar: Computationally Efficient Integration of Complex Thermal Multi-Chip Power Module Models into Circuit Simulators, Power Conversion Conference - Nagoya (PCC), S. 550–557, 2007.
- [17] U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, J.-M. Meyer & J. W. Kolar: Modelling the thermal coupling between internal power semiconductor dies of a water-cooled 3300V/1200A HiPak IGBT module, International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion and Power Quality (PCIM Europe), 2007.
- [18] A. Eddahech, O. Briat & J. M. Vinassa: Lithium-ion battery heat generation investigation based on calorimetric entropy measurements, IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), S. 1–5, 2013.
- [19] S. M. Elkuri: Thermische Untersuchungen an leistungselektronischen Systemen, Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, 2005.
- [20] M. Fleckenstein, S. Fischer, O. Bohlen & B. Bäker: Thermal Impedance Spectroscopy - A method for the thermal characterization of high power battery cells, Journal of Power Sources, Bd. 223, S. 259–267, 2013.
- [21] FloEFD - Technical Reference, Software Version 13, Mentor Graphics Corporation, 2015.
- [22] R. M. Foster: A reactance theorem, Bell System Technical Journal, Bd. 3, S. 259–267, 1924.
- [23] P. Freiburger: Transient thermal modeling of aluminum electrolytic capacitors under varying mounting boundary conditions, 21st International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (THERMINIC), S. 1–5, 2015.
- [24] L. Gao, S. Liu & R. A. Dougal: Dynamic lithium-ion battery model for system simulation, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Bd. 25, Nr. 3, S. 495–505, 2002.

- [25] P. Gauché & W. Wei: Linearized Superposition using CFD for Thermal and Power Characterization of Electronic Equipment with Significant Thermal Radiation and Natural Convection, International Symposium on Microelectronics, S. 880–885, 2002.
- [26] Y. C. Gerstenmaier, A. Castellazzi & G. Wachutka: Electrothermal simulation of multichip-modules with novel transient thermal model and time-dependent boundary conditions, IEEE Transactions on Power Electronics, Bd. 21, Nr. 1, S. 45–55, 2006.
- [27] Y. C. Gerstenmaier, W. Kiffe & G. Wachutka: Combination of Thermal Subsystems by Use of Rapid Circuit Transformation and Extended Two-port Theory, Microelectronics Journal, Bd. 40, Nr. 1, S. 26–34, 2009.
- [28] Y. C. Gerstenmaier, W. Kiffe & G. Wachutka: Combination of thermal subsystems modeled by rapid circuit transformation, 13th International Workshop on Thermal Investigation of ICs and Systems (THERMINIC), S. 115–120, 2007.
- [29] Y. C. Gerstenmaier, H. Pape & G. Wachutka: Boundary Independent Exact Thermal Model for Electronic Systems, International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM), S. 19–21, 2001.
- [30] Y. C. Gerstenmaier & G. Wachutka: A new Procedure for the Calculation of the Temperature Development in Electronic Systems, European Conference on Power Electronics and Applications (EPE), 1999.
- [31] Y. C. Gerstenmaier & G. Wachutka: Calculation of the temperature development in electronic systems by convolution integrals, 16th Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, S. 50–59, 2000.
- [32] J. Grabow: Verallgemeinerte Netzwerke in der Mechatronik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2013.
- [33] X. Guo, D. Celo, D. J. Walkey & T. Smy: The Use of Constant Heat Flow Ports For Thermal Macro-models, 10th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (THERMINIC), 2004.
- [34] K. Stephan H. D. Baehr: Wärme- und Stoffübertragung, Springer Vieweg, 2003.
- [35] D. W. Hahn & M. N. Ozisik: Heat Conduction, Wiley, 2012.
- [36] H. Herwig: Wärmeübertragung A-Z: Systematische und ausführliche Erläuterungen wichtiger Größen und Konzepte, VDI-Buch, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

- [37] X. Hu, S. Lin, S. Stanton & W. Lian: A Foster Network Thermal Model for HEV/EV Battery Modeling, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Bd. 47, Nr. 4, S. 1692–1699, 2011.
- [38] W. Huang, M. R. Stan & K. Skadron: Parameterized physical compact thermal modeling, *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, Bd. 28, Nr. 4, 2005.
- [39] T. Hunger: Numerical investigation on thermal crosstalk of silicon dies in high voltage IGBT modules, *International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Power Quality (PCIM Europe)*, 2008.
- [40] M. Iachello, V. De Luca, G. Petrone, N. Testa, L. Fortuna, G. Cammarata, S. Graziani & M. Frasca: Lumped Parameter Modeling for Thermal Characterization of High-Power Modules, *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, Bd. 4, Nr. 10, S. 1613–1623, 2014.
- [41] F. P. Incropera: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, 2006.
- [42] Infineon: *Thermische Ersatzschaltbilder*, Application Note, 2008.
- [43] M. Ishizuka, T. Hatakeyama, Y. Funawatashi & K. Koizumi: Application of Thermal Network Model to Transient Thermal Analysis of Power Electronic Package Substrate, *Active and Passive Electronic Components*, Bd. 2011, 2011.
- [44] JESD15-4: *DELPHI Compact Thermal Model Guideline*, JEDEC Solid State Technology Association, 2008.
- [45] JESD51-1: *Integrated Circuit Thermal Measurement Method - Electrical Test Method (Single Semiconductor Device)*, JEDEC Solid State Technology Association, 1995.
- [46] JESD51-14: *Transient Dual Interface Test Method for the Measurement of the Thermal Resistance Junction to Case of Semiconductor Devices with Heat Flow Through a Single Path*, JEDEC Solid State Technology Association, 2010.
- [47] J. H. J. Janssen: Creation and use compact thermal models for virtual prototyping of electronic assemblies from a semiconductor companies perspective, *20th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (THERMINIC)*, S. 1–6, 2014.
- [48] R. R. Craig Jr: *A Brief Tutorial on Substructure Analysis and Testing*, *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 2000.
- [49] B. Klein: *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*, Vieweg+Teubner Verlag, 2012.

- [50] J. O. Krah & C. Klarenbach: On-Line Semiconductor Junction Temperature Estimation for Frequency Inverters, International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion and Power Quality (PCIM Europe), 2010.
- [51] D. Kuehbacher, A. Kelleter & D. Gerling: An improved approach for transient thermal modeling using lumped parameter networks, Electric Machines Drives Conference (IEMDC), S. 824–831, 2013.
- [52] C. J. M. Lasance: Ten Years of Boundary-Condition-Independent Compact Thermal Modeling of Electronic Parts: A Review, Heat Transfer Engineering, Bd. 29, S. 149–168, 2008.
- [53] C. J. M. Lasance: The influence of various common assumptions on the boundary-condition-independence of compact thermal models, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Bd. 27, Nr. 3, S. 523–529, 2004.
- [54] P. B. Laval: Partial Differential Equations for Scientists, Skript zur Vorlesung, Department of Mathematics, Kennesaw State University, 2009.
- [55] H. Li, X. Liao, Y. Li, S. Liu, Y. Hu, Z. Zeng & L. Ran: Improved thermal couple impedance model and thermal analysis of multi-chip paralleled IGBT module, Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), S. 3748–3753, 2015.
- [56] E. H. Lieb & J. Yngvason: The Physics and Mathematics of the Second Law of Thermodynamics, Physics Reports, Bd. 314, Nr. 6, 1999.
- [57] Z. Luo, H. Ahn & M. A. E. Nokali: A thermal model for insulated gate bipolar transistor module, IEEE Transactions on Power Electronics, Bd. 19, Nr. 4, S. 902–907, 2004.
- [58] J. Lutz: Halbleiter-Leistungsbaulemente - Physik, Eigenschaften, Zuverlässigkeit, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [59] P. Maglie: Anwendung von FE-basierten Reduktionsmethoden, German, VDI-Mechatronik, S. 312–320, 2009.
- [60] H. Maleki, A. H. Said, J. R. Selman, R. B. Dinwiddie & H. Wang: Thermal properties of lithium-ion battery and components, Journal of the Electrochemical Society, Bd. 146, Nr. 3, S. 947–954, 1999.
- [61] J. Meng, X. Wen, Y. Zhong & Z. Qiu: A Thermal Model for Electrothermal Simulation of Power Modules, Journal of International Conference on Electrical Machines and Systems, S. 441–446, 2013.
- [62] L. Niebergall: Online-Sperrschichttemperaturberechnung von Multichip-Leistungshalbleiterbauelementen, Masterarbeit, Universität Ilmenau, 2003.

- [63] G. P. Nikishkov: Basics of the Domain Decomposition Method for Finite Element Analysis, Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Methods, S. 119–142, 2007.
- [64] Z. Y. Ong, S. Subramani & M. Devarajan: Thermal simulation analysis of high power LED system using two-resistor compact LED model, 5th Asia Symposium on Quality Electronic Design (ASQED), S. 334–338, 2013.
- [65] K. L. Pandya & W. McDaniel: A simplified method of generating thermal models for power MOSFETs, 18th Annual IEEE Symposium on Semiconductor Thermal Measurement and Management, S. 83–87, 2002.
- [66] D. Petit & R. Hachette: Model reduction in linear heat conduction: use of interface fluxes for the numerical coupling, International Journal of Heat and Mass Transfer, Bd. 41, Nr. 21, S. 3177–3189, 1998.
- [67] W. Polifke & J. Kopitz: Wärmeübertragung: Grundlagen, analytische und numerische Methoden, Pearson Studium, 2009.
- [68] Produktdatenblatt GBA 18V 4.0Ah, Robert Bosch GmbH, 2019.
- [69] M. Rencz: New possibilities in the thermal evaluation, offered by transient testing, Microelectronics Journal, Bd. 34, S. 171–177, 2003.
- [70] E. B. Rudnyi, J. Lienemann, A. Greiner & J. G. Korvink: mor4ansys: Generating Compact Models Directly from ANSYS Models, Technical Proceedings of the 2004 Nanotechnology Conference and Trade Show (Nanotech), S. 279–282, 2004.
- [71] A. Samba, N. Omar, H. Gualous, Y. Firouz, P. Van den Bossche, J. Van Mierlo & T. I. Boubekeur: Development of an Advanced Two-Dimensional Thermal Model for Large size Lithium-ion Pouch Cells, Electrochimica Acta, Bd. 117, S. 246–254, 2014.
- [72] J. P. Schmidt: Verfahren zur Charakterisierung und Modellierung von Lithium-Ionen Zellen, Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik, 2013.
- [73] M. Scholdt: Temperaturbasierte Methoden zur Bestimmung der Lebensdauer und Stabilisierung von LEDs im System, Karlsruher Institut für Technologie, Lichttechnisches Institut, 2013.
- [74] R. Schwarze: CFD-Modellierung - Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [75] D. Schweitzer: A Fast Algorithm for Thermal Transient Multisource Simulation Using Interpolated Zth Functions, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Bd. 32, Nr. 2, S. 478–483, 2009.

- [76] D. Schweitzer: Thermal transient characterization of semiconductor devices with multiple heat sources - Fundamentals for a new thermal standard, 19th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (THERMINIC), S. 301–304, 2013.
- [77] P. Seshu: Substructuring and Component Mode Synthesis, Shock and Vibration, Bd. 4, Nr. 3, S. 199–210, 1997.
- [78] J. W. Sofia: Electrical measurement using semiconductors, Bd. 3, Nr. 1, 1997.
- [79] J. W. Sofia: Fundamentals of Thermal Resistance Measurement, Analysis Tech, 1995.
- [80] N. S. Spinner, K. M. Hinnant, R. Mazurick, A. Brandon, S. L. Rose-Pehrsson & S. G. Tuttle: Novel 18650 lithium-ion battery surrogate cell design with anisotropic thermophysical properties for studying failure events, Journal of Power Sources, Bd. 312, S. 1–11, 2016.
- [81] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan & F. Mayinger: Thermodynamik - Grundlagen und technische Anwendungen - Band 1: Einstoffsysteme, Springer Vieweg, 2013.
- [82] A. Thess: Das Entropieprinzip: Thermodynamik für Unzufriedene, De Gruyter Oldenbourg, 2007.
- [83] M. Touzelbaev, J. Miler, Y. Yang, G. Refai & K. Goodson: High-Efficiency Transient Temperature Calculations for Applications in Dynamic Thermal Management of Electronic Devices, Journal of Electronic Packaging, Bd. 135, Nr. 3, 2013.
- [84] A. Wintrich, U. Nicolai, W. Tursky & T. Reimann: Applikationshandbuch Leistungshalbleiter, Semikron, 2015.
- [85] Y. Xu, H. Chen, S. Lv, F. Huang & Z. Hu: Thermal Model for Power Converters Based on Thermal Impedance, Bd. 13, Nr. 6, S. 1080–1089, 2013.
- [86] M. G. Zeyen & A. Wiebelt: Handbuch Lithium-Ionen-Batterien, Springer Vieweg, 2013.
- [87] Fraunhofer Institute for integrated circuits: Thermal Modeling of Power-electronic Systems, 2006.
- [88] VDI e.V.: VDI-Wärmeatlas, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.





# A Anhang

## Tabellen

Tabelle A.1: Methoden der Klasse „TCM“.

	Eingabe		Ausgabe	
	Bezeichnung	Datentyp	Bezeichnung	Datentyp
Erstellen <sup>1</sup>	Zth	Cell,Table(i,j)	Obj	TCM
	Zeit	Double(n,1)		
	Reihenname <sup>2</sup>	Cell(i,1)		
	Spaltenname <sup>2</sup>	Cell(j,1)		
FosterFit	Obj	TCM	ObjZthFit	TCM
	AnzSelbst	Int	ObjZthParam	TCM
	AnzKoppel	Int		
	PosSelbst	Double(u,2)		
SimTemp	Obj	TCM	Temperatur	Table(i)
	ZeitPIn	Double(n1,1)		
	PIn	Cell(j,1)		
	Tamb	Double		
	ZeitOut	Double(n2,1)		
Koppeln	Obj1	TCM	Obj3	TCM
	Obj2	TCM		
	IntPolMeth	Char		
	ZeitOut	Double(n2,1)		
Plot	Obj	TCM		Figure
PlotDiff	Obj1	TCM		Figure
	Obj2	TCM		

<sup>1</sup> Konstruktor

<sup>2</sup> Optional

Tabelle A.2: Übersichtstabelle der Testfälle zur Validierung und Analyse des CoC-Verfahrens.

Tf <sup>1</sup>	Sys <sup>2</sup>	Interface A <sup>3</sup>	Interface B	Zeit A <sup>4</sup>	Zeit B	IM <sup>5</sup>	Zeit AB	$\epsilon_{max}$ [%] <sup>6</sup>
1	1	4	1	lin(0:0.1:200)	lin(0:0.1:200) <sup>7</sup>		lin(0:0.1:200)	0,08
2	1	4,8,12,16	1,5,9,13	--	--		--	0,08
3	1	M <sub>arith</sub> (4,8,12,16) <sup>9</sup>	M <sub>arith</sub> (1,5,9,13)	--	--		--	20
4	2	M <sub>arith</sub> (4,8,12,16) <sup>9</sup>	M <sub>arith</sub> (1,5,9,13)	--	--		--	15
5	1	4,8,12,16	1,5,9,13	log(-3,4,50) <sup>8</sup>	log(-3,4,50)	linear	log(-3,4,50)	1,5
6	1	4,8,12,16	1,5,9,13	--	--	spline	--	0,1
7	3	4	1	log(-3.5,0.5,50)	log(0,4,5,50)	spline	log(-3.5,4,5,50)	5
8	4	4	1	log(-3,4,50)	log(-3,4,50)	spline	log(-3,4,50)	0,6
9	4	M <sub>arith</sub> (4,8,12,16)	1	lin(0:0,1:200)	lin(0:0,1:200)		lin(0:0,1:200)	0,15
10	4	M <sub>gew</sub> (4,8,12,16)	1	--	--		--	0,01
11	5	M <sub>gew</sub> (4,8,12,16)	M <sub>gew</sub> (1,5,9,13)	--	--		--	1,5
12 <sup>10</sup>	3	4	1	log(-3,4,50)	log(-3,4,50)		log(-3,4,50)	8

<sup>1</sup> Nummer des Testfalls  
<sup>2</sup> System nach Abbildung 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 und 5.10  
<sup>3</sup> Angabe, welche Knoten gekoppelt werden.  
<sup>4</sup> Zeitschrittverteilung  
<sup>5</sup> Interpolationsmethode  
<sup>6</sup> Maximale Abweichung nach 5.2.3  
<sup>7</sup> lin(a,b,c): lineare Verteilung zwischen a und c mit Zeitschritt b  
<sup>8</sup> log(a,b,c): logarithmische Verteilung von c Zeitschritten in den Intervallgrenzen a und b  
<sup>9</sup> Mittelwertbildung aus mehreren Knoten  
<sup>10</sup> Kopplung über äquivalentes Cauer-Netz

## Abbildungen

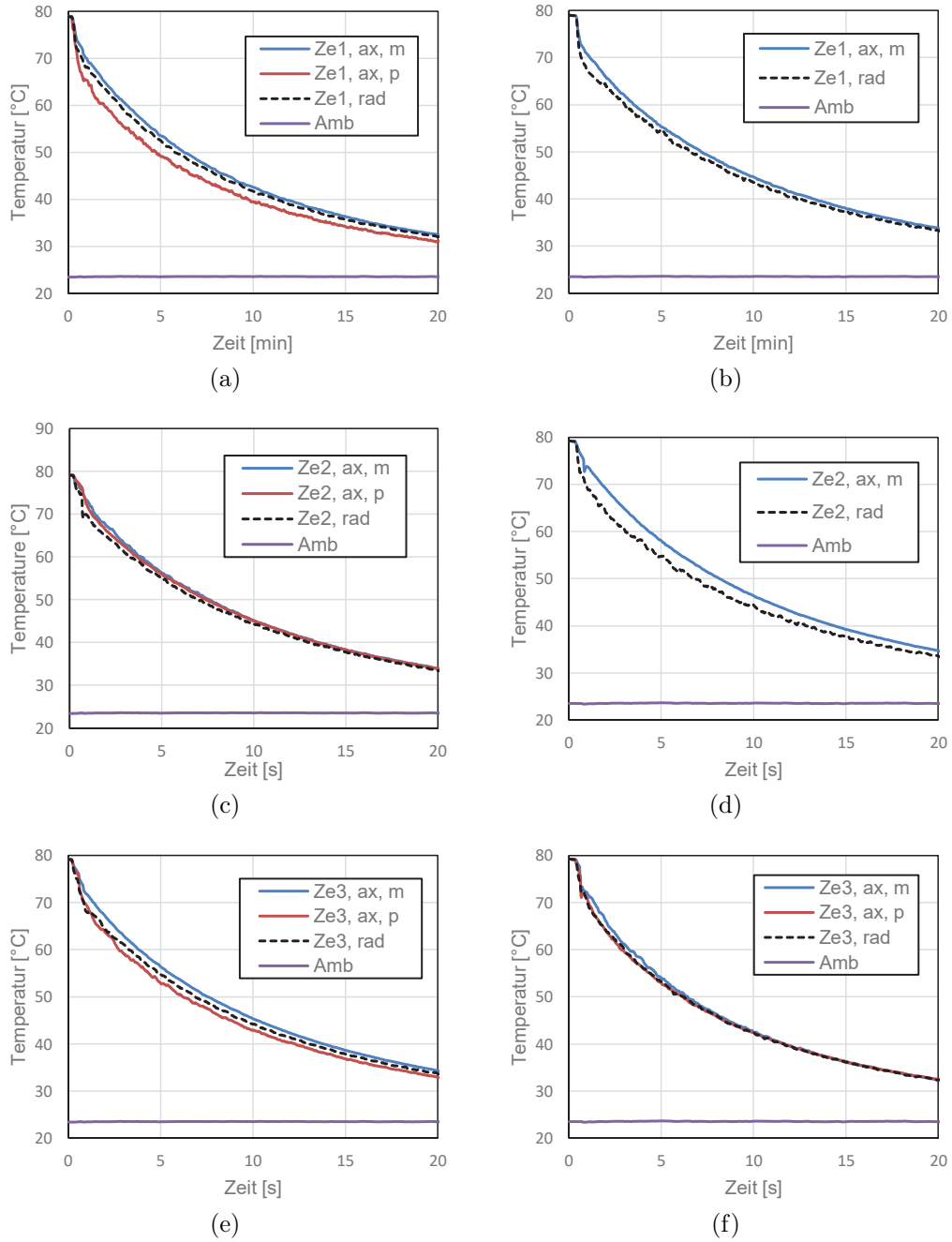


Abbildung A.1: Messdaten Lithium-Ionen-Batterie: Abkühlkurven beginnend bei 80°C unter freier Konvektion auf Batteriehalter liegend, an drei 18650 Lithium-Ionen-Zellen des gleichen Herstellers.

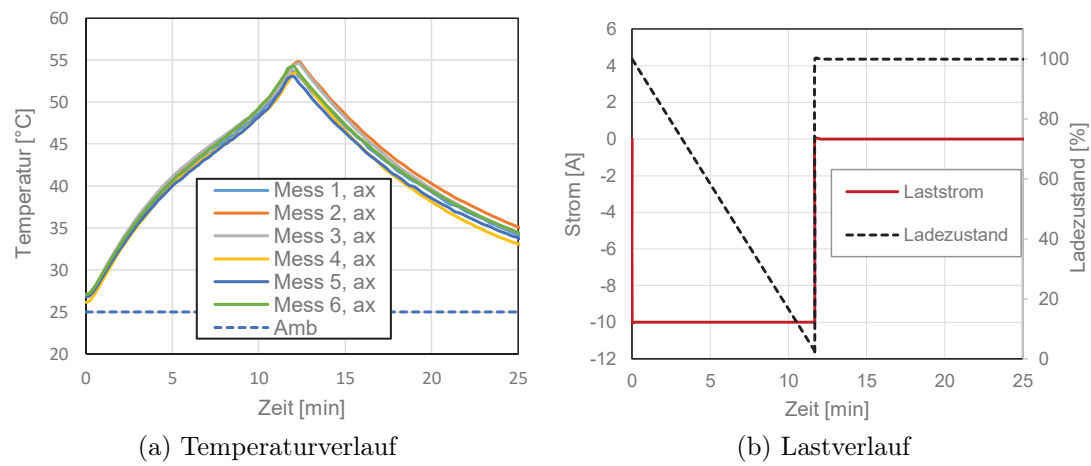


Abbildung A.2: Messdaten Lithium-Ionen-Batterie: Entladekurven einer 18650 Lithium-Ionen-Zelle.